

الرياضيات

السنة الأولى الثانوي

جذع مشترك
شعبة : العلوم الإنسانية

1

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التعليم الثانوي العام

الرياضيات

السنة الأولى ثانوي

جذع مشترك
شعبة
العلوم الإنسانية

1

إشراف المفتش العام : أحمد شومان

تأليف الأساتذة

قويدر فلاح مقتدر زروقي الأخضر دلول
أحمد زناقي عبد الرحمان زقاري

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

يعتبر الكتاب المدرسي، في نظامنا التربوي، الحجر الأساسي للوثائق التربوية والوسائل الأساسية بالنسبة لعمليتي التعليم والتعلم. فوجوده يكتسي أهمية بالغة سواء بالنسبة للتلميذ أو الأستاذ، إذ هو مرجع للأول وسند للأستاذ. بيد أن الواقع أن بعض الكتب المدرسية المستعملة في مرحلتنا الثانوية أصبحت لا تسائر المناهج لا من حيث المحتوى ولا من حيث الشكل، وذلك للاختلال الذي وقع في هذه المرحلة بسبب التغييرات الكثيرة التي طرأت في الكتب المدرسية، ونتيجة لذلك فإن فقدان الاستيعام في الكتب المدرسية المتداولة.

من هنا جاءت الحاجة العاسة إلى معالجة هذا الموضوع من خلال إعداد كتب جديدة تكون محتوياتها انسجمة مع محتويات البرامج الجديدة. وهذا الكتاب: "كتاب الرياضيات" الموجه لتلاميذ السنة الأولى (الجدع المشترك) (أداب).

إن قضية الكتاب المدرسي لا تكمن في نوعيته وتوفره بين أيدي التلاميذ فحسب، بل تتعدى ذلك إلى كيفية استعماله بفعالية وإدراكه من قبل التلاميذ واستثمار محتوياته والانتفاع به. وهي أمور ينبغي للسلطات المعنية أن تولوها العناية والاهتمام اللازمين.

أخيراً، نأمل أن يكون في هذا العمل ما يعزز جهود الأساتذة ويساعدهم على أداء مهامهم التربوية، وأن يجد فيه التلاميذ الأداة المشوقة والمحفزة على العمل والاجتهاد في طلب العلم.

والله ولي التوفيق

مدير التعليم الثانوي العام

تقديم

يتكون هذا الكتاب من الأبواب الخمسة التالية :

1. أنشطة عديدة
 2. المنطق والمجموعات والعلاقات
 3. كثيرات الحدود والمعادلات والمترجمات
 4. الهندسة التحليلية
 5. الدوال العددية لمتغير حقيقي
- وكل باب مجزأ إلى عدة دروس وكل درس بني وفق المخطط التالي :

1. أنشطة تمهيدية
 - أمثلة ملائمة تسمح بالتأكد من إمتلاك التلاميذ للمفاهيم اللازمة لإستيعاب الدروس الجديدة .
 - أنشطة مستمدة من المكتسبات السابقة تسمح للتلميذ باكتشاف المفاهيم الجديدة
 - ينبغي أن يحضر التلاميذ هذه الأنشطة خارج الدرس مما يسمح بربح الوقت وإشراك التلاميذ في الدرس .

2. عرض الدرس
 - الدرس وجيز ومقدم بلغة واضحة بسيطة .
 - التعاريف والخواص متبوعة بأمثلة ملائمة يمكن أن تكون مرجعاً وتساعد على الفهم والحفظ .

3. التطبيق
 - أنشطة لتوظيف المكتسبات في وضعيات تسمح بالتوسع .

4. التمارين المحلولة

إعطاء حلول نموذجية من أجل :

1. إكتساب طريقة لحل تمرين .
2. تدريب التلاميذ على كيفية تحرير الحل .

5. التمارين

التمارين المقترحة هي على نوعين :

1. تمارين للتطبيق المباشر تسمح بمراقبة المكتسبات .
2. تمارين للتطبيق غير المباشر تسمح بتوظيف المعارف في وضعيات تتطلب تفكيراً ومهارات بهدف تعزيز المكتسبات .

وإننا إذ نقدم هذا الكتاب إلى أبنائنا تلاميذ السنة الأولى ثانوي ، الجذع المشترك
آداب ، نأمل أن يساهم في تقريب مادة الرياضيات إلى أذهانهم ، وأن يساعدهم في
السير قدماً في دراستهم .
أعاننا الله على خدمة الوطن وأبنائه إنه ولي التوفيق .

المشرف

أحمد شومان

1. أنشطة التهيئة

نشاط 1 : - ما هو عدد التلاميذ في قسمك ؟
 - ما عدد أفراد أسرتك ؟
 - ما سنة ميلادك ؟
 - كم يوم جمعة في الأسبوع ؟
 - كم من مرة تحصلت الجوائز على كأس العالم في كرة القدم ؟
 الجواب عن كل واحد من هذه الأسئلة يتضمن عددا يسمى طبيعيا .

نرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز \mathbb{N} ، ونكتب :

ط = {0, 1, 2, 3, ..., ن, ...} المجموعة {1, 2, 3, ..., ن, ...} تسمى مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة، ونرمز إليها بالرمز ط*.

تنشيط 2 : لتكن الأعداد الطبيعية :

75, 72, 39, 32, 20, 11, 10, 9, 7, 5, 3, 2, 1, 0

— من بين هذه الأعداد عين تلك التي تقبل القسمة على 2 .

ما هي أرقام أحاد الأعداد التي تقبل القسمة على 2 ؟

تذكر القاعدة المتناسية

... من بين الأعداد السابقة ما هي تلك التي تقبل القسمة على 5 ؟

ما هي أرقام أحاد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 ؟

تذكر القاعدة المناسبة

— من بين الأعداد السابقة ما هي تلك التي تقبل القسمة على 3 و 9 ؟

تتحقق ان مجموع ارقام كل عدد يقبل القسمة على 3 او على 9 هو ايضا يقبل

القسمة على 3 أو على 9 .

تذكر قاعدة قابلية القسمة على 3 و 9

نشاط 3 : أكتب كلام من الجداءات التالية على شكل قوة لعدد طبيعي :

$$\dots = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$\dots = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

على ماذا يدل كل من 5 و 3 في الكتابة 5 ؟

أكتب كلام من 5 و 3 على شكل جداء .

أكتب كلام من الأعداد التالية على شكل جداء قوى .

$$\dots = 4 \times 9 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2$$

$$\dots = 1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 4 \times 1$$

نشاط 4 : معنى المساواة : $a = b \times c$

ليكن العدد الطبيعي 48

تحقق أن 48 يقبل القسمة على 3

$$\text{وأن : } 16 \times 3 = 48$$

نقول إن : 48 مضاعف لكل من 3 و 16 .

وأن كلام من 3 و 16 هو قاسم للعدد 48 .

وبصفة عامة :

المساواة : $a = b \times c$ تعني :

أ مضاعف لكل من : ب و ج

كل من ب و ج قاسم للعدد أ

2. القواسم والمضاعفات

1 - الأعداد الأولية :

نشاط 1 : أبحث عن قواسم كل من الأعداد الطبيعية التالية :

2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 10 ، 11 ، 13

- ماهي الأعداد التي لها قاسمان فقط ؟

- ماهي الأعداد التي لها أكثر من قاسمين ؟

كل عدد طبيعي له قاسمان فقط يسمى عددا أوليا .

كل عدد طبيعي يقبل أكثر من قاسمين هو عدد غير أولي .

تعريف :

نقول عن عدد طبيعي ب إنه أولي إذا كان عدد قواسمه اثنين فقط هما 1 و ب .

أسئلة :

17 يقبل قاسمين فقط هما 1 و 17 فهو عدد أولي .

15 يقبل عدة قواسم هي : 1 ، 3 ، 5 ، 15 فهو غير أولي .

42 يقبل أكثر من قاسمين مثلا : 1 ، 2 ، 3 ، 6 ، 7 فهو عدد غير أولي .

العدد 1 لا يقبل إلا قاسما واحدا فقط هو 1 فهو غير أولي .

العدد 0 يقبل القسمة على كل عدد طبيعي ماعدا 0 فهو غير أولي .

2 - تحليل عدد طبيعي إلى عوامل أولية :

ليكن العدد الطبيعي 360

العدد 360 يقبل القسمة على العدد الأولي 2 ، فهو يكتب :

$$180 \times 2 = 360$$

العدد 180 أيضا يقبل القسمة على العدد الأولي 2 ، فهو يكتب :

$$90 \times 2 = 180$$

العدد 90 أيضا يقبل القسمة على العدد الأولي 2 ، فهو يكتب :

$$45 \times 2 = 90$$

العدد 45 لا يقبل القسمة على 2 ، ولكنه يقبل القسمة على العدد الأولي الموالي

$$\text{وهو } 3 \text{ ويكتب : } 15 \times 3 = 45$$

العدد 15 أيضا يقبل القسمة على 3 ، فهو يكتب :

$$5 \times 3 = 15$$

العدد 5 لا يقبل القسمة على 3 ، لكنه يقبل القسمة على 5 فهو يكتب :

$$1 \times 5 = 5$$

العدد 1 هو آخر حاصل ، وهو لا يقبل القسمة على أي عدد أولي . لذلك نتوقف عن القسمة

من خلال هذه المساويات تحقق من أن :

$$180 \times 2 = 360$$

$$(90 \times 2) \times 2 =$$

$$[(45 \times 2) \times 2] \times 2 =$$

$$[(15 \times 3) \times 2] \times 2 =$$

$$[[(5 \times 3) \times 3] \times 2] \times 2 =$$

$$5 \times (3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2) =$$

$$5^2 \times 3^3 \times 2 = 360$$

نقول إننا حللنا العدد 360 إلى جداء عوامل أولية وهي : 5 ، 3 ، 2 .

وعملينا نستعمل الوضع التالي :

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$5^2 \times 3^3 \times 2 = 360$$

3 - مضاعفات عدد طبيعي

ليكن العددين الطبيعيان أ ، ب حيث :

$$5^2 \times 3^3 \times 2 = \text{ب} , \quad 7^4 \times 5^5 \times 3 \times 2 = \text{أ}$$

تحقق أن :

$$\text{أ} = \text{ب} \times (7^2 \times 5^2 \times 2)$$

أي أ مضاعف للعدد ب .

لاحظ أن تحليل ب إلى جداء عوامل أولية يشمل :

العامل 2 ثلاث مرات على الأكثر .

العامل 3 مرة واحدة على الأكثر .

العامل 5 مرتين على الأكثر .

إذن : تحليل العدد أ الذي هو مضاعف للعدد ب يشمل على الأقل كل العوامل الأولية لتحليل ب .
من جهة أخرى ليكن أ⁻ ، ب العددين الطبيعيين :

$$13 \times 5^2 \times 3^4 \times 2^8 = \text{أ}^+ \quad \text{و} \quad 5^2 \times 3^3 \times 2 = \text{ب}^-$$

تحقق أن تحليل أ⁻ يشمل :

- . العامل 2 ثلاث مرات على الأقل .
- . العامل 3 مرة واحدة على الأقل .
- . العامل 5 مرتين على الأقل .

أي أنه يشمل على الأقل كل العوامل الأولية لتحليل ب .
إذن : العدد أ⁻ الذي يشمل على الأقل كل العوامل الأولية لتحليل ب هو مضاعف للعدد ب .
وبصفة عامة :

أ و ب عددين طبيعيين غير معدومين .
يكون أ مضاعفا للعدد ب إذا وفقط إذا كان :
تحليل أ إلى جداء عوامل أولية يشمل على الأقل كل العوامل الأولية لتحليل ب .
أس كل عامل من عوامل أ يساوي على الأقل أس نفس العامل في تحليل ب .

مثال : ليكن العدد الطبيعي : $5^2 \times 3^3 \times 2 = \text{ب}^-$.

- كل مضاعف للعدد ب يشمل :
- . العامل 2 ثلاث مرات على الأقل .
- . العامل 3 مرة واحدة على الأقل .
- . العامل 5 مرتين على الأقل .
- ويمكن أن يشمل عوامل أولية أخرى .

تحقق أن العدد : $7 \times 5^2 \times 3^3 \times 2^2$ مضاعف للعدد ب .

وأن العدد : $5^4 \times 3^4 \times 2^4$ هو مضاعف آخر للعدد ب .

وأن العدد : $5^2 \times 3^2 \times 2^2$ ليس مضاعفا للعدد ب .

4 - قواسم عدد طبيعي

ليكن العددين الطبيعيان أ ، ب حيث :

$$7 \times 5 \times 3 \times 2 = \overset{3}{A} \quad \text{و} \quad 5 \times 3 \times 2 = \overset{4}{B}$$

تحقق أن :

$$7 \times 5 \times (5 \times 3 \times 2) = \overset{4}{A}$$

أي أن أ من الشكل : أ = ب × ك

هذه المساواة تعني أن ب يقسم أ .

لاحظ أن تحليل ب إلى عوامل أولية يشمل :

العامل 2 أربع مرات على الأكثر .

العامل 3 مرة واحدة على الأكثر .

العامل 5 مرة واحدة على الأكثر .

فالعوامل الأولية لتحليل العدد ب موجودة كلها في تحليل أ .

من جهة أخرى :

ليكن العددين الطبيعيان أ و ب حيث :

$$7 \times 5 \times 3 \times 2 = \overset{3}{A} \quad \text{و} \quad 7 \times 5 \times 3 = \overset{2}{B}$$

لاحظ أن تحليل ب لا يشمل إلا العوامل الأولية الموجودة في تحليل أ .

وأس كل عامل من ب يساوي على الأكثر أس نفس العامل في تحليل أ .

تحقق أن :

$$A = B \times (5 \times 2)$$

هذه المساواة تعني أن أ مضاعف للعدد ب وبالتالي ب قاسم للعدد أ .

وبصفة عامة :

أ ، ب عددين طبيعيين غير معدومين :

يكون ب قاسما للعدد أ إذا وفقط إذا كان :

تحليل ب إلى عوامل أولية لا يشمل إلا العوامل الأولية لتحليل أ .

أس كل عامل من عوامل ب يساوي على الأكثر أس نفس العامل في تحليل أ .

مثال : ليكن العدد الطبيعي A حيث :

$$A = 2 \times 3 \times 5$$

كل قاسم للعدد A لا يشمل إلا :

. العامل 2 ثلاث مرات على الأكثر .

. العامل 3 أربع مرات على الأكثر .

. العامل 5 مرة واحدة على الأكثر .

مثلا : للعدد 2×3 قاسم للعدد A .

العدد 3×5 قاسم للعدد A .

العدد 2×3 لا يقسم A (لأن 2 معطى بأس أكبر من أس 2 في تحليل A)

العدد $2 \times 3 \times 7$ لا يقسم A (لأن العامل 7 غير موجود في تحليل A)

5 - البحث عن قواسم عدد طبيعي

مثال 1 : لنبحث عن قواسم العدد 12

نكتب العدد 12 بالشكل $12 = A \times B$

تحقق أن : $12 \times 1 = 12$

$$6 \times 2 =$$

$$4 \times 3 =$$

هذه المساويات تعني أن كلا من : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12 هو قاسم للعدد 12 .

نرمز إلى مجموعة قواسم 12 بالرمز Q_{12} ونكتب :

$$Q_{12} = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12 \}$$

مثال 2 : لنبحث عن مجموعة قواسم العدد 90

$$90 = 2 \times 3 \times 5$$

و بحسب القاعدة السابقة كل قاسم للعدد 90 هو من الشكل : $Q = 2 \times 3 \times 5$ حيث :

$$0 \leq m \leq 1 , 0 \leq n \leq 2 , 0 \leq h \leq 1$$

هذا يعني أن تحليل Q يشمل :

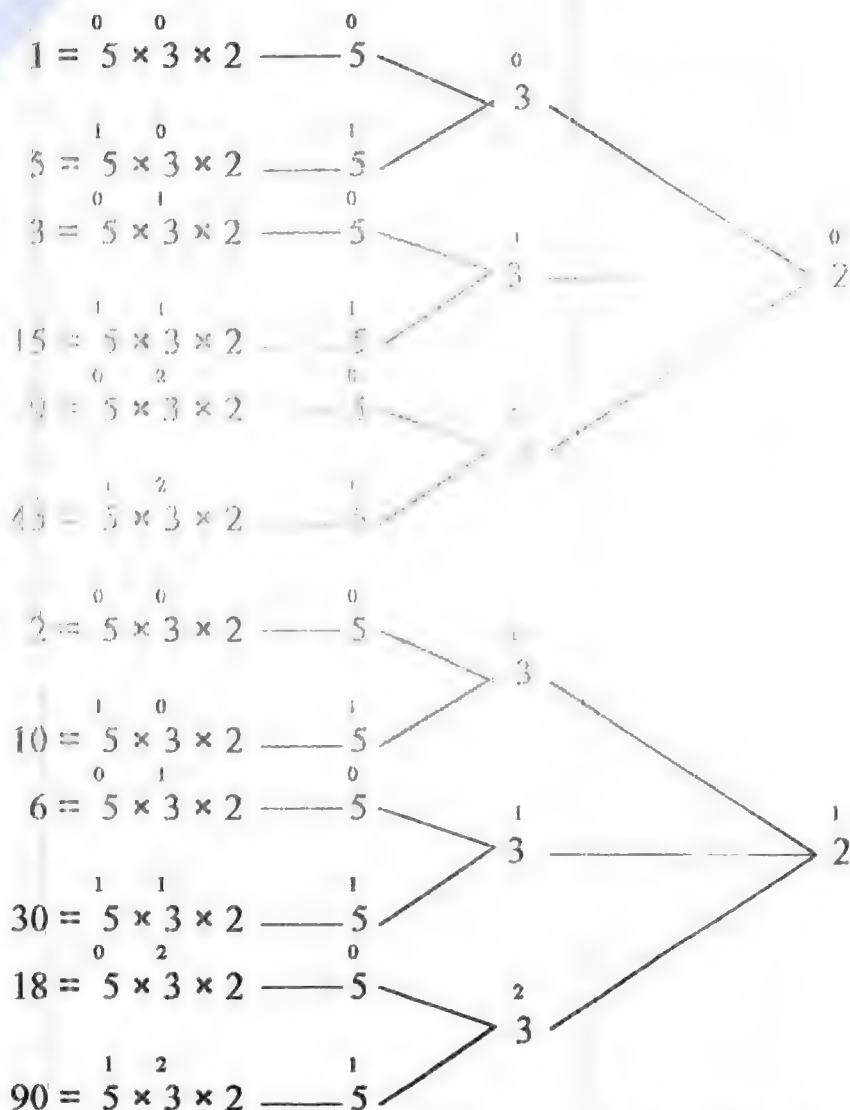
. العامل 2 مرة واحدة على الأكثر .

. العامل 3 مرتين على الأكثر .

. العامل 5 مرة واحدة على الأكثر .

ولإيجاد جميع قواسم العدد 90 نستعمل تحليله إلى عوامل أولية أي :

في الطريقة العملية التالية المسماة بالشجرة . $5 \times 3 \times 2 = 90$



مجموعة قواسم 90 هي :

$\{ 90, 45, 30, 18, 15, 10, 9, 6, 5, 3, 2, 1 \} = 90$ ق

لاحظ من جهة أن عدد قواسم 90 هو 12 .

ومن جهة أخرى الجداء (1 + 1) . (1 + 2) . (1 + 1) يساوي 12، حيث الأعداد 1 ، 2 ، 1 هي أسس العوامل الأولية 2 ، 3 ، 5 .

وبصفة عامة: $ل = أ \times ب \times ج$ حيث : أ ، ب ، ج هي أعداد أولية فإن عدد قواسم ل هو الجداء : (1 + ن) (1 + م) (1 + هـ) .

3 . مثال ووقت :

1 . **الاعداد الأولية من 0 إلى 100** .

لايجاد الأعداد الأولية الأصغر من 100 نتبع الطريقة التالية :
بما أن 0 و 1 غير أوليين ، فنكتب الأعداد الطبيعية من 2 إلى 100 ، ثم نشطب الأعداد غير الأولية ، كما يلي :
2 عدد أولي ، لكن كل مضاعفات 2 غير أولية ، فلنشطبها .
3 عدد أولي ، لكن كل مضاعفات 3 غير أولية ، فلنشطبها .
5 عدد أولي ، لكن كل مضاعفات 5 غير أولية ، فلنشطبها .
7 عدد أولي ، لكن كل مضاعفات 7 غير أولية ، فلنشطبها .
أتم هكذا شطب الأعداد غير الأولية ، لتجد قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 100 .

10	9	8	7	6	5	4	3	2	
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

2 - التعرف على عدد أولي :

طريقة عملية للتعرف على عدد أولي .
لكي تعرف إن كان العدد الطبيعي أوليا أم لا نستعمل إما جدول الأعداد الأولية وإما الطريقة العملية المبينة في المثال التالي :

مثال : هل العدد الطبيعي 727 أولي ؟ .
نقسم 727 بالتوالي على الأعداد الأولية 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، ... فنحصل على الجدول التالي :

العدد	القاسم	الحاصل	الباقى
727	2	366	1
	3	262	1
	5	145	2
	7	103	6
	11	66	1
	13	55	12
	17	42	13
	19	38	5
	23	31	14
	29	25	

لاحظ أنه كلما كبر القاسم فإن الحاصل يصغر . وأنه عند القسمة على 29 صار الحاصل 25 أصغر من القاسم 29 .

لذا نتوقف عن القسمة ونستنتج أن 727 أولي ، لأنه لو قسم عدد أولي أكبر من 29 العدد 727 لكان الحاصل أيضا قاسما للعدد 727 ولكننا قد وجدناه قبل قسمة 727 على 29 .
وبصفة عامة:

للبحث فيما إذا كان العدد أوليا أم لا نقسم هذا العدد بالتوالي على الأعداد الأولية : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، نتوقف عن القسمة عندما يظهر أول حاصل أصغر من القاسم ونستنتج أن العدد أولي .

ملاحظة : في قسمة ما إذا حصلنا على باقى قسمة معدوم نتوقف عن القسمة ونستنتج أن العدد غير أولي .

3- تمارين محلولة

تمرين 1 :

تعرف إن كان العددان الطبيعيان 127 و 341 أوليين .

الحل

لنستعمل الطريقة العملية السابقة .

العدد	القواسم	الحواصل	البواقي	العدد	القواسم	الحواصل	البواقي
341	2	170	1	127	2	63	1
	3	113	2		3	42	1
	5	68	1		5	25	2
	7	48	5		7	18	1
	11	31	0		11	11	6
					13	9	10

الحاصل 9 أصغر من القاسم 13
فالعدد 127 أولي .

الباقى 0 يدل على أن كلا من 11 و 31
يقسم 341 . فالعدد 341 غير أولي .

تمرين 2 :

أ ، ب ، ج أعداد طبيعية حيث :

$$11 \times 49 \times 75 = أ ؛ ب = 11 \times 21 \times 25 ؛ ج = 25 \times 49$$

(1) اكتب كلا من أ ، ب ، ج على شكل جداء عوامل أولية .

(2) بين أن أ مضاعف للعدد ب وأن ج يقسم أ .

الحل

(1) نكتب كلا من أ ، ب ، ج على شكل جداء عوامل أولية .

$$أ = 11 \times 49 \times 75$$

$$ب = 11 \times (7 \times 7) \times (3 \times 5 \times 5)$$

$$ج = 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

$$ب = 11 \times 21 \times 25$$

$$= 11 \times (3 \times 7) \times (5 \times 5)$$

$$11 \times 7 \times 5^2 \times 3 =$$

$$49 \times 25 = \text{ج}$$

$$(7 \times 7) \times (5 \times 5) =$$

$$7^2 \times 5^2 =$$

$$11 \times 5^2 \times 3^2 = \text{ب} \quad \text{و} \quad 11 \times 7^2 \times 5^2 \times 3 = \text{ا} .$$

تحليل أ يشمل كل العوامل الأولية للعدد ب وبأسس تساوي على الأقل أسس عوامل ب .

فالعدد أ مضاعف للعدد ب .

$$11 \times 7^2 \times 5^2 \times 3 = \text{ا} \quad \text{و} \quad 7^2 \times 5^2 = \text{ج} .$$

تحليل ج لا يشمل إلا العوامل الأولية للعدد أ وبأسس تساوي على الأكثر أسس عوامل أ .

فالعدد ج يقسم أ .

تمارين

في كل ما يأتي الأعداد المعتبرة هي أعداد طبيعية .
التحليل إلى جداء عوامل أولية .

1 تعرف إن كانت الأعداد التالية أولية :
127 ، 341 ، 721 ، 869 ، 1721

2 اكتب كلا من الأعداد التالية على شكل جداء عوامل أولية :

$$21 \times 7 \times 25$$

$$5 \times 4$$

$$81 \times 27 \times 9$$

$$642 : 740 : 120$$

$$4 \times 360$$

$$45 \times 32$$

$$2 \times 10 \times 72$$

3 حلل العدد 2520 إلى جداء عوامل أولية .
اكتب ، باستعمال هذا التحليل ، العدد 2520 على شكل جداء عاملين أحدهما 1 هو عدد أولي . (توجد أربع جداءات) .
القواسم والمضاعفات

4 ليكن : $360 = 1$ ، $12 = 2$
1) اكتب كلا من أ و ب على شكل جداء عوامل أولية .
2) اعتمادا على هذين التحليلين بين أن ب يقسم أ .
استنتج حاصل قسمة أ على ب .

5 هل العدد : $3^4 \times 2^2$ قاسم لكل من :
 $5^8 \times 2$ ؛ $11^5 \times 3 \times 2$ ؛ $5^3 \times 2$ ؛ $3^5 \times 2^2$ ؛ $7^5 \times 3 \times 2$
عين الحاصل في حالة ما إذا كان : $3^4 \times 2^2$ قاسما لعدد من الأعداد السابقة.

6 6 بين إن كان العدد الطبيعي : $5 \times 3 \times 2$ مضاعفا لكل من الأعداد الطبيعية:
 5×2 ؛ 3×2 ؛ $11 \times 7 \times 5 \times 3 \times 2$ ؛ 3×2 ؛ 5×2

7 7 عين قواسم كل من الأعداد : 72 ؛ 140 ؛ 110

8 8 عين خمسة قواسم للعدد الطبيعي : $7 \times 3 \times 2$

9 9 لتكن الأعداد الطبيعية:
 $5 \times 3 \times 2 = \text{أ}$ ؛ $5 \times 3 \times 2 = \text{ب}$ ؛ $5 \times 3 \times 2 = \text{ج}$ ؛
 بين أن أ و ب مضاعفان للعدد ج .

10 10 لتكن الأعداد الطبيعية:
 $5 \times 3 \times 2 = \text{أ}$ ؛ $5 \times 3 \times 2 = \text{ب}$ ؛ $5 \times 3 \times 2 = \text{ج}$ ؛
 بين أن أحد هذه الأعداد قاسم للعدد الآخرين .

1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

- حل العدد 140 إلى جداء عوامل أولية .
- ما هو عدد قواسم 140 ؟ عين هذه القواسم .

نشاط 2 :

- عين قواسم كل من العددين 60 و 72 .
- عين القواسم المشتركة لهذين العددين .

2- القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

ليكن العدنان الطبيعيان :

$$5 \times 3 \times 2 = 30 \quad ; \quad 7 \times 5 \times 2 = 70$$

ولنبحث عن قاسم مشترك لهما .

تحليل كل قاسم للعدد أ يشمل :

. العامل 2 ثلاث مرات على الأكثر .

. العامل 3 مرتين على الأكثر .

. العامل 5 أربع مرات على الأكثر .

ولا يشمل عوامل أولية أخرى

تحليل كل قاسم للعدد ب يشمل :

. العامل 2 أربع مرات على الأكثر .

. العامل 5 مرة واحدة على الأكثر .

. العامل 7 مرة واحدة على الأكثر .

ولا يشمل عوامل أولية أخرى

هذا الجدول يبين أن كل قاسم مشترك للعددين أ و ب يشمل :

. العامل 2 ثلاث مرات على الأكثر .

. العامل 5 مرة واحدة على الأكثر .

ولا يشمل عوامل أولية أخرى

هذا يعني أن تحليل كل قاسم مشترك للعددين أ و ب يشمل على الأكثر العوامل

$$2^3 ; 2 ; 5$$

فالعدد : $2^3 \times 2 \times 5 = 40$ هو أكبر قاسم مشترك للعددين أ و ب ويسمى القاسم المشترك

الأكبر للعددين أ و ب ونكتب :

$$40 = \text{ق م أ (أ ؛ ب)} = 2^3 \times 2 \times 5$$

$$= 40$$

وبصفة عامة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين نستعمل القاعدة التالية .

للحصول على القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين كل منهما أكبر من 1 :

. نحلل كلا من العددين إلى جداء عوامل أولية .

. نحسب جداء العوامل المشتركة من هذين التحليلين بحيث نأخذ كل عامل

مشترك بأصغر أس

مثال 1 : لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعدين : 132 ، 240

$$\text{لدينا : } 132 = 2^2 \times 3 \times 11$$

$$\text{لدينا : } 240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

$$\text{ومنه : ق م أ } (132, 240) = 2^2 \times 3 = 12$$

مثال 2 : لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعدين : 48 ، 240

$$\text{لدينا : } 48 = 2^4 \times 3$$

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

$$\text{ومنه : ق م أ } (240, 48) = 2^4 \times 3 = 48$$

ماذا تلاحظ ؟ .

2 -- القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية .

لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية كل منها أكبر من 1 نستعمل القاعدة السابقة .

مثال : لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 1008 ؛ 1080 ؛ 3564 .
نحل كل من هذه الأعداد إلى جداء عوامل أولية نجد :

$$1008 = 2^4 \times 3^3 \times 7$$

$$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$3564 = 2^2 \times 3^4 \times 11$$

القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد هو جداء العوامل الأولية المشتركة للتحليلات الثلاثة ، بحيث كل عامل يؤخذ بأصغر أس .

أي أن :

$$\text{ق م أ } (1008, 1080, 3564) = 2^2 \times 3^3 = 36$$

3 - الأعداد الطبيعية الأولية فيما بينها .

ليكن $a = 340$ ؛ $b = 273$
لنحلل كلا من a و b

$$340 = 2^2 \times 5 \times 17$$

$$273 = 2 \times 7 \times 13$$

لاحظ أن تحليلي a و b لا يشملان عوامل أولية مشتركة .
إذن لا توجد قواسم مشتركة لهذين العددين ما عدا العدد الطبيعي 1 الذي يقسم كل عدد طبيعي .

نقول إن العددين a و b أوليان فيما بينهما ونكتب : $q.m(a ; b) = 1$
ومنه التعريف التالي :

a ، b عددان طبيعيان غير معدومين .
نقول إن a أولي مع b إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1
نقول أيضا إن a و b أوليان فيما بينهما .

مثال : لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 12 ؛ 18 ؛ 35

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$35 = 5 \times 7$$

ومنه : $q.m(12 ; 18) = 1$ فالعددان 12 ، 35 أوليان فيما بينهما .

أيضا : $q.m(18 ; 35) = 1$ فالعددان 18 ، 35 أوليان فيما بينهما .

أما : $q.m(12 ; 18) = 6 = 2 \times 3$ فالعددان 12 ، 18 ليسا أوليين فيما بينهما .

4 - خواص القاسم المشترك الأكبر

خاصية 1 :

ليكن العددان الطبيعيان 36 و 45

$$36 = 2^2 \times 3^2 \quad ; \quad 45 = 3^2 \times 5$$

$$q.m(36 ; 45) = 9 = 3^2$$

ومن جهة أخرى : $4 = 9 \div 36$

$$5 = 9 \div 45$$

لاحظ أن الحاصلين 4 و 5 أوليان فيما بينهما .
هذه النتيجة عامة ، ومنه الخاصية التالية :

خاصية 1 :

إذا قسمنا عددين طبيعيين غير معدومين على قاسمهما المشترك الأكبر
فإننا نحصل على عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما .

خاصية 2 :

ليكن العددان الطبيعيان 48 و 54

$$\begin{aligned} & \text{لدينا : } 3 \times 2 = 48 \quad ; \quad 3 \times 2 = 54 \\ & \text{إذن : ق م أ } (48 ; 54) = 3 \times 2 = 6 \\ & \text{تحقق أن :} \end{aligned}$$

$$\{ 48 ; 24 ; 16 ; 12 ; 8 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 \} = 48 \text{ ق}$$

$$\{ 54 ; 27 ; 18 ; 9 ; 8 ; 6 ; 3 ; 2 ; 1 \} = 54 \text{ ق}$$

وأن القواسم المشتركة للعددين : 48 و 54 هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 6 .
ثم لاحظ أن هذه القواسم المشتركة للعددين 48 و 54 هي نفسها قواسم القاسم
المشترك الأكبر للعددين 48 و 54 .

خاصية 2 :

مجموعة القواسم المشتركة لعدة أعداد طبيعية غير معدومة هي مجموعة قواسم
القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد .

3. تبسيط كسرات :

أ. الكسر البسيط

أ و ب عدنان طبيعيان ، ب $\neq 0$

أ

الرمز : — يدل على كسر ، بسطه أ ومقامه ب .

ب

أ

العدنان أ ، ب هما حدا الكسر —

ب

. نعلم أن قيمة الكسر — لا تتغير بضرب حديه في عدد طبيعي غير معدوم .

ب

أ × ك

أي أن : — = — حيث ك عدد طبيعي غير معدوم .

ب × ك

3 × 2

مثال 1 : — = — (بوضع ك = 2) .

5 × 2

6

— =

10

6 3

أي : — = — . نقول إن الكسرين — و — متكافئان .

10 5

6 3

10 5

لاحظ أن : 6 × 5 = 10 × 3

أ

. نعلم أن قيمة الكسر — لا تتغير أيضا بقسمة حديه على عدد طبيعي غير معدوم .

ب

أ ÷ ك

أي : — = — حيث ك قاسم مشترك للعددين أ و ب .

ب ÷ ك

مثال 2 : $\frac{3 \div 12}{3 \div 15} = \frac{12}{15}$ (بوضع ك = 3)

$$\frac{4}{5} =$$

أي : $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ ، فالكسران $\frac{4}{5}$ و $\frac{12}{15}$ متكافئان

لاحظ أن : $4 \times 15 = 5 \times 12$

مثال 3 : لنكن الكسور : $\frac{5}{10}$ ؛ $\frac{3}{6}$ ؛ $\frac{1}{2}$

لاحظ أن : $\frac{5 \times 1}{5 \times 2} = \frac{1}{2}$ و $\frac{3 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

نقول إن الكسور $\frac{5}{10}$ و $\frac{3}{6}$ و $\frac{1}{2}$ متكافئة ونكتب : $\frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

لنكن الكسور : $\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{3}{15}$ ؛ $\frac{15}{45}$

لاحظ أن :

$\frac{15 \div 15}{15 \div 45} = \frac{15}{45}$ و $\frac{3 \div 15}{3 \div 45} = \frac{15}{45}$

$$\frac{1}{3} =$$

$$\frac{5}{15} =$$

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \frac{15}{45} : \text{إذن}$$

$$\text{ونقول إن الكسور : } \frac{1}{3} \text{ و } \frac{5}{15} \text{ و } \frac{15}{45} \text{ متكافئة}$$

وبصفة عامة :

يكون الكسران $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ج}{د}$ متكافئين إذا وفقط إذا كان : $ا \times د = ب \times ج$

2 - اختزال الكسور

$$\text{ليكن الكسر } \frac{6}{9} \text{ ولنبحث عن كسر مكافئ له ، حداه أصغر من حدي } \frac{6}{9} .$$

لاحظ أن العدد 3 هو قاسم مشترك للحددين 6 و 9 .

$$\text{ومنه : } \frac{2}{3} = \frac{3+6}{3+9} = \frac{6}{9} \text{ (حسب قاعدة مبادقة)}$$

$$\text{لاحظ أن الكسر } \frac{2}{3} \text{ مكافئ للكسر } \frac{6}{9} \text{ ، وحداه أصغر من حدي } \frac{6}{9}$$

$$\text{أي : } 6 > 2 \text{ و } 9 > 3$$

$$\text{نقول إننا اختزلنا الكسر } \frac{6}{9}$$

وبصفة عامة :

للحصول على كسر مختزل للكسر $\frac{1}{ب}$ نقسم كلا من ا و ب على قاسم مشترك لهما .

مثال :

$$\begin{aligned} & \frac{24}{36} \text{ ليكن الكسر .} \\ & \text{لنبحث عن كسور مختزلة لهذا الكسر .} \\ & \text{لاحظ أن : 2 ؛ 3 ؛ 4 هي قواسم مشتركة للعددين 24 ، 36 .} \\ & \frac{24}{36} = \frac{2 \div 24}{2 \div 36} = \frac{1}{18} \text{ لدينا :} \\ & \frac{24}{36} = \frac{3 \div 24}{3 \div 36} = \frac{1}{12} \\ & \frac{24}{36} = \frac{4 \div 24}{4 \div 36} = \frac{1}{9} \\ & \frac{24}{36} \text{ هو كسر مختزل للكسر } \frac{1}{18} ؛ \frac{1}{12} ؛ \frac{1}{9} \end{aligned}$$

3 - الكسر غير القابل للاختزال :

تعريف

نقول عن كسر إنه غير قابل للاختزال إذا فقط إذا كان حدها أوليين فيما بينهما .

مثال:

اختزل الكسر $\frac{24}{36}$ إلى أبسط شكل لدينا : ق م ا (36 ؛ 24) = 12

$$\frac{2}{3} = \frac{12 \div 24}{12 \div 36} = \frac{24}{36} \text{ ومنه :}$$

2 ؛ 3 أو اثنان فيهما ، فالكسر $\frac{2}{3}$ غير قابل للاختزال .

قاعدة:

لا نحسب على الكسر غير القابل للاختزال المكافئ لكسر ، نقسم حذوي هذا الكسر على قاسمهما المشترك الأكبر .

في الحسابات ، فإن الأعداد الكسرية يفضل تعويض ، كل كسر بالكسر المكافئ له غير القابل للاختزال .

مثال:

$$\frac{720}{1800} \text{ لنختزل الكسر}$$

تحقق أن : ق م ا (1800 ؛ 720) = 360

$$\frac{2}{5} = \frac{360 \div 720}{360 \div 1800} = \frac{720}{1800} \text{ وأن :}$$

$\frac{2}{5}$ هو الكسر المكافئ للكسر $\frac{720}{1800}$ غير القابل للاختزال .

ومنه : ق م أ $12 = 3 \times 2^2 = (72, 36, 24)$ إذن أكبر قيمة للعدد ن هي 12 .

تمرين 2

اختزل الكسر $\frac{72}{90}$ إلى أبسط شكل . ثم عين الكسر $\frac{1}{ب}$ المكافئ له بحيث يكون : $3 + 5 ب = 74$

الحل

لنختزل الكسر $\frac{72}{90}$: لدينا $3 \times 2^3 = 72$ و $5 \times 3 \times 2^2 = 90$

و ق م أ $18 = 3 \times 2^2 = (90, 72)$
 $\frac{18}{4} = \frac{18 + 72}{72} = \frac{90}{72}$

ومنه : $\frac{5}{18 + 90} = \frac{90}{90}$

الكسر $\frac{1}{ب}$ غير قابل للاختزال ، وبالتالي فالكسر المطلوب $\frac{1}{ب}$ هو من الشكل :

$4 \times ك$

و البحث عن أ و ب يؤول إلى البحث عن العدد الطبيعي ك الذي يحقق $5 \times ك$

المساواة : $3 + 5 ب = 74$ بحيث : $4 = ك$ و $5 = ب$

أي : $74 = (4 ك) + 5 (5 ك)$

أو : $74 = 12 ك + 25 ك$

$37 ك = 74$ ومنه : $ك = 2$

وبالتالي الكسر $\frac{1}{ب}$ المطلوب هو : $\frac{2 \times 4}{2 \times 5}$ أي $\frac{8}{10}$

تدوين

القاسم المشترك الأكبر

1 أ ، ب عدنان طبيعيان بحيث : $75 = أ$ ، $525 = ب$ عين ق م أ (أ ، ب) ؛ ثم عَيِّن القواسم المشتركة لهذين العددين .

2 أعد نفس السؤال إذا كان :
 $345 = أ$ و $540 = ب$
 $104 \times 4 = أ$ و $5 \times 32 = ب$

3 حل كلا من أ ، ب إلى جداء عوامل أولية ، ثم عَيِّن :
 ق القاسم المشترك الأكبر للعددين أ و ب .
 أ و ب حاصلتي قسمة كل من أ و ب على ق .
 القاسم المشترك الأكبر للعددين : أ و ب . ماذا تستنتج ؟
 وذلك من أجل كل من الحالات التالية :

$$\begin{aligned} 625 \times 36 = ب \quad \text{و} \quad 75 \times 24 = أ \\ 32 \times 9 = ب \quad \text{و} \quad 144 \times 2 = أ \\ 30 \times 162 = ب \quad \text{و} \quad 54 \times 27 = أ \end{aligned}$$

4 يتكون مخيم كشفي من 315 كشافا و 42 ممرنا .
 ما هو أكبر عدد من الأفواج التي يمكن تشكيلها بحيث تشمل نفس العدد من الكشافين من جهة ولها نفس العدد من الممرنين من جهة أخرى .

الأعداد الطبيعية الأولى

5 هل أ و ب أوليان فيما بينهما في كل حالة من الحالات التالية ؟
 $49 \times 81 = ب$ و $15 \times 221 = أ$
 $7423 = ب$ و $1080 = أ$

6 لتكن الأعداد :

$$36 = ج \quad ; \quad 55 = ب \quad ; \quad 35 \times 25 \times 2^4 = أ$$

بين فيما إذا كانت هذه الأعداد أولية فيما بينهما مثلى مثلى .

اختزال الكسور :

7 اختزل الكسور التالية حتى تحصل على الكسور غير القابلة للإختزال :

$$\begin{array}{r} 17 \times 2^5 \\ \hline 44 \times 34 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 33 \times 5 \times 2^3 \\ \hline 75 \times 16 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 49 \times 25 \times 3^4 \\ \hline 21 \times 35 \times 81 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 3500 \\ \hline 490 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 328 \\ \hline 1044 \end{array}$$

8 اختزل الكسور التالية حتى تحصل على الكسور غير القابلة للإختزال :

$$\begin{array}{r} 14 \times 6 \times 4^3 \\ \hline 9 \times 8^2 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 35 \times 9 \\ \hline 49 \times 3^4 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 726 \\ \hline 544 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 25 \times 144^2 \\ \hline 18 \times 45^2 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 45 \times 9 \times 16^2 \\ \hline 10 \times 6^3 \end{array}$$

الكسور المتكافئة :

9 عين الكسر — المكافئ للكسر — بحيث يكون : أ + ب = 1573
104 ب

10 عين الكسر — المكافئ للكسر — بحيث يكون : ب - أ = 13
90 ب

1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

- . تعلم أن مضاعفات عدد طبيعي a هي من الشكل :
 $a \times k$ حيث $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n ; \dots\}$
- . عين بعض المضاعفات للعدد 12 .
- . هل يمكن تعيين أكبر مضاعف للعدد 12 ؟ لماذا ؟
- . ماذا تستنتج بخصوص عدد مضاعفات عدد طبيعي ؟ .

نشاط 2 :

- . عين مضاعفات كل من 8 و 12 التي هي أصغر من 100 .
- . استنتج المضاعفات المشتركة للعددين 8 و 12 .
- . ما هو أصغر مضاعف مشترك غير معدوم لهما ؟ .

2 - المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين

ليكن العددان الطبيعيان :

$$5 \times 3 \times 2^2 = \text{أ} \quad ; \quad 7 \times 3 \times 2^3 = \text{ب}$$

ولنبحث عن مضاعف مشترك لهما :

تحليل كل مضاعف للعدد أ يشمل :	تحليل كل مضاعف للعدد ب يشمل :
العامل 2 مرتين على الأقل	العامل 2 ثلاث مرات على الأقل
العامل 3 مرة على الأقل	العامل 3 مرة واحدة على الأقل
العامل 5 مرة على الأقل	العامل 7 مرة واحدة على الأقل

نستنتج مما سبق أن كل مضاعف مشترك للعددين أ و ب يشمل :

العامل 2 ثلاث مرات على الأقل

العامل 3 مرة واحدة على الأقل

العامل 5 مرة واحدة على الأقل

العامل 7 مرة واحدة على الأقل

ويمكن يشمل عوامل أولية أخرى

هذا يعني أن تحليل كل مضاعف مشترك للعددين أ و ب يشمل على الأقل العوامل الأولية $2^3 ; 2^2 ; 3 ; 5 ; 7$.

فالعدد : $7 \times 5 \times 3 \times 2^3$ هو أصغر مضاعف مشترك للعددين أ و ب ويسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين أ و ب ونكتب :

$$\text{م م أ (أ ؛ ب)} = 7 \times 5 \times 3 \times 2^3$$

وبصفة عامة :

لنبحث عن المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين نستعمل القاعدة التالية :

للحصول على المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين :

نحلل كلا من العددين إلى جداء عوامل أولية .

نحسب جداء العوامل المشتركة وغير المشتركة في هذين التحليلين بحيث نأخذ

كل عامل بأكبر أس .

مثال 1 : لنبحث عن المضاعف المشترك الأصغر للعددين : 132 ، 240

$$\text{لدينا : } 11 \times 3 \times 2^2 = 132$$

$$\text{لدينا : } 5 \times 3 \times 2^4 = 240$$

$$\text{ومنه : م أ } 7 \times 5 \times 3 \times 2 = (240, 132) \\ 2640 =$$

مثال 2: لنبحث عن المضاعف المشترك الأصغر للعددين : 240 ، 48

$$\text{لدينا : } 3 \times 2 = 48$$

$$5 \times 3 \times 2 = 240$$

$$\text{ومنه : م أ } 5 \times 3 \times 2 = (240, 132) \\ 240 =$$

2 - المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية

لتعيين المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية كل منها أكبر من 1 نستعمل القاعدة السابقة .

مثال: لنبحث عن المضاعف المشترك الأصغر للأعداد الطبيعية :

$$1080 ; 234 ; 144$$

. بتحل كل من هذه الأعداد إلى جداء عوامل أولية نجد :

$$3 \times 2 = 144$$

$$3 \times 2 = 234$$

$$5 \times 3 \times 2 = 1080$$

فالمضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة للتحليلات الثلاثة ، بحيث نأخذ كل عامل بأكبر أس .

أي أن :

$$6480 = 5 \times 3 \times 2 = (1080 ; 234 ; 144) \text{ م أ }$$

3 - خاصية

لنعتبر العددين الطبيعيين 15 و 18 ولنبحث عن تحليل مضاعف مشترك لهما .

$$\text{لدينا : } 3 \times 2 = 18 ; 5 \times 3 = 15$$

نعلم أن كل مضاعف مشترك للعددين 15 و 18 يشمل :

. العامل 2 مرة واحدة على الأقل

. العامل 3 مرتين على الأقل

. العامل 5 مرة على الأقل

ويمكن أن يشمل عوامل أولية أخرى

فكل مضاعف مشترك للعددين 15 و 18 هو عدد ل من الشكل :

$$ل = 2 \times 3 \times 5 \times ك \quad \text{حيث ك عدد طبيعي .}$$

$$\text{أي : ل = م م أ (15 ؛ 18) } \times ك$$

هذه المساواة تعني أن كل مضاعف مشترك للعددين 15 و 18 هو مضاعف

للمضاعف المشترك الأصغر لهذين العددين .

وبصفة عامة لدينا :

خاصية :

المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين هي مضاعفات مضاعفهما المشترك

الأصغر .

3. تطبيقات

توحيد المقامات

لنبحث عن كسرين مكافئين ، على الترتيب ، للكسرين $\frac{3}{8}$ و $\frac{5}{6}$ بحيث يكون

لهما أصغر مقام مشترك .

المقام المشترك الأصغر المطلوب هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامين 8 ؛ 6

وهو العدد 24 .

لدينا : من جهة : $4 \times 6 = 24$

ومن جهة أخرى : $3 \times 8 = 24$

$$\frac{3 \times 3}{3 \times 8} = \frac{3}{8} \quad \text{و} \quad \frac{4 \times 5}{4 \times 6} = \frac{5}{6} \quad \text{إنن :}$$

$$\frac{9}{24} = \quad \quad \quad \frac{20}{24} =$$

الكسيران : $\frac{9}{24}$ و $\frac{20}{24}$ هما كسيران مكافئان على الترتيب للكسرين $\frac{3}{8}$ و $\frac{5}{6}$

نقول إننا وحدنا مقامي الكسرين : $\frac{3}{8}$ و $\frac{5}{6}$

القاعدة :

لتوحيد مقامات عدة كسور :

نبحث عن المضاعف المشترك الأصغر لمقامات هذه الكسور .
نبحث عن الكسور المكافئة للكسور المفروضة التي مقام كل منها هو المضاعف المشترك الأصغر المحصل عليه سابقا .

مثال : $\frac{7}{6}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{3}{8}$ لنوجد مقامات الكسور :

لدينا : $3 \times 2 = 6$ ، $2^2 = 4$ ، $2^3 = 8$

إذن : م م أ $24 = 3 \times 2^3 = (6, 4, 8)$

ومنه : $\frac{4 \times 7}{4 \times 6} = \frac{7}{6}$ ؛ $\frac{6 \times 5}{6 \times 4} = \frac{5}{4}$ ؛ $\frac{3 \times 3}{3 \times 8} = \frac{3}{8}$
 $\frac{28}{24} =$ ، $\frac{30}{24} =$ ، $\frac{9}{24} =$

الكسور $\frac{28}{24}$ ، $\frac{30}{24}$ ، $\frac{9}{24}$ لها نفس المقام وهي مكافئة على الترتيب للكسور $\frac{7}{6}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{3}{8}$

4 تمارين محلولة

تمرين 1

$$\text{لتكن الكسور : } \frac{7}{63}, \frac{5}{9}, \frac{2}{15}$$

وحد مقامات هذه الكسور بحيث يكون لها أصغر مقام مشترك .

الحل

أصغر مقام مشترك لهذه الكسور هو : م م أ (63 ، 9 ، 15)
لدينا : $5 \times 3 = 15$

$$\frac{2}{3} = 9$$

$$\frac{7}{3} = 63$$

ومنه : م م أ $315 = 7 \times 5 \times 3 = (63 ؛ 9 ؛ 15)$
لنبحث عن الكسور المكافئة لهذه الكسور بحيث يكون مقامها المشترك الأصغر هو العدد

315 لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{42}{315} &= \frac{(7 \times 3) \times 2}{(7 \times 3) \times 15} = \frac{2}{15} \\ \frac{175}{315} &= \frac{(7 \times 5) \times 5}{(7 \times 5) \times 9} = \frac{5}{9} \\ \frac{35}{315} &= \frac{(7 \times 5) \times 9}{5 \times 7} = \frac{9}{7} \\ \frac{315}{315} &= \frac{5 \times 63}{63} = \frac{63}{63} \end{aligned}$$

هكذا نحصل على الكسور : $\frac{42}{315}, \frac{175}{315}, \frac{35}{315}$ ، التي لها نفس المقام
والمكافئة على التوالي لكل من : $\frac{2}{15}$ و $\frac{5}{9}$ و $\frac{7}{63}$.

تمرين 2

عدد تلاميذ مدرسة محصور بين 700 و 1000 . إذا وزع هؤلاء التلاميذ إلى أفواج تربوية تضم إما 36 تلميذا وإما 40 تلميذا فلا يبقى أي تلميذ دون فوج .
ما هو عدد التلاميذ ؟ .

الحل

ليكن n عدد التلاميذ بحيث : $700 < n < 1000$ ، بما أنه عند تقويع التلاميذ في الحالتين لا يبقى أي تلميذ بدون فوج فإن هذا يعني أن n مضاعف مشترك لكل من 36 و 40 . فكل مضاعف مشترك للعددين 36 و 40 هو مضاعف لمضاعفهما المشترك الأصغر m (36 ، 40) .
لدينا :

$$5 \times 2^3 = 40 \quad \text{و} \quad 3^2 \times 2^2 = 36$$

ومنه : $m = 360 = 5 \times 3^2 \times 2^3$ أي : $n = 360 \times k$ حيث k عدد طبيعي .

بما أن : $700 < n < 1000$ و $n = 360 \times k$

فإن : $700 < 360 \times k < 1000$

$$\frac{700}{360} < k < \frac{1000}{360} \quad \text{أي :}$$

$$1,9 < k < 2,7$$

فالعدد الطبيعي المحصور بين 1,9 و 2,7 هو العدد 2 أي : $k = 2$

$$\text{ومنه : } n = 2 \times 360$$

$$n = 720 .$$

تمارين

المضاعف المشترك الأصغر

1

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين أ ، ب ، ثم عين المضاعفات المشتركة للعددين أ و ب والتي كل منها أصغر من 1500 ، في كل من الحالتين التاليتين :

$$\begin{array}{ll} \text{أ} = 128 & \text{و} \quad \text{ب} = 34 \\ \text{أ} = 45 & \text{و} \quad \text{ب} = 12 \end{array}$$

2 نفس الأسئلة إذا كان :

2

$$\begin{array}{ll} \text{أ} = 38 & \text{و} \quad \text{ب} = 180 \\ \text{أ} = 35 & \text{و} \quad \text{ب} = 12 \end{array}$$

3

م هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين أ ، ب . عين القيم الممكنة للعدد ب علما بأن :

$$\text{أ} = 3 \times 2^2 \quad \text{م} = 2^4 \times 3^5 \times 5^2$$

4

عين كلا من القاسم المشترك الأكبر ق ، والمضاعف المشترك الأصغر م للعددين أ ، ب . ثم قارن الجداءين : ق × م و أ × ب في كل من الحالتين التاليتين :

$$\begin{array}{ll} \text{أ} = 156 \times 24 & \text{و} \quad \text{ب} = 56 \times 28 \\ \text{أ} = 35 \times 2^4 & \text{و} \quad \text{ب} = 135 \times 27 \end{array}$$

5 وحد مقامات الكسور التالية :

$$\frac{63}{84} \quad \text{و} \quad \frac{55}{66} .$$

$$\frac{7}{65} \quad \text{و} \quad \frac{2}{15} \quad \text{و} \quad \frac{5}{9} .$$

6 وحد مقامات الكسور التالية :

$$\frac{24}{108} \quad \text{و} \quad \frac{48}{72} \quad \text{و} \quad \frac{25}{75} .$$

$$\frac{5 \times 12 \times 14}{63 \times 56} \quad \text{و} \quad \frac{14 \times 25}{70 \times 6} \quad \text{و} \quad \frac{13 \times 3 \times 4}{7 \times 3 \times 2^2} .$$

1. نشاط تمهيدي

ليكن الكسران : $\frac{14}{36}$ و $\frac{15}{90}$

- اختزل كلا من هذين الكسرين
- وحدّ مقامي الكسرين المختزلين

• أحسب المجموع : $\frac{15}{90} + \frac{14}{36}$

• أحسب الفرق : $\frac{15}{90} - \frac{14}{36}$

• أحسب الجداء : $\frac{15}{90} \times \frac{14}{36}$

• أحسب حاصل القسمة : $\frac{15}{90} \div \frac{14}{36}$

2 . الكسور والأعداد الكسرية

(1) الأعداد الكسرية

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{4 \times 1}{4 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{4 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{4 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{6}$$

الكسور : $\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{2}{4}$ ؛ $\frac{3}{6}$ ؛ $\frac{4}{8}$ هي كسور متكافئة

هذه الكسور تمثل عددا يسمى عددا كسريا ونكتب .

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

وأبسط ممثل له هو الكسر غير القابل للاختزال : $\frac{1}{2}$.

- لتسهيل القراءة والكتابة نعبر تجاوزا من الآن فصاعدا عن العدد الكسري الذي
ممثلته $\frac{1}{2}$ " بالكسر " $\frac{1}{2}$
ب ب

- كل عدد طبيعي ن يعتبر عددا كسريا ممثلا بالكسر $\frac{ن}{1}$

مثلا :

$$\frac{2}{1} = 2 \quad ; \quad \frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad \frac{0}{1} = 0$$

• الكتابة : $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ تعني :

الكسيران : $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ج}{د}$ متكافئان .

والعددان الكسريان $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ج}{د}$ متساويان .

(2) الأعداد العشرية

• الكسر العشري :
تعريف

الكسر العشري هو كسر مقامه قوة للعدد 10

مثال :

كل من $\frac{27}{1000}$ و $\frac{43}{100}$ و $\frac{25}{10}$ هو كسر عشري .

كل من $\frac{5}{7}$ و $\frac{1}{3}$ هو كسر غير عشري لأنه لا يمكن كتابة كل من 3 و 7 كقوة للعدد 10 .

• العدد العشري

تعريف

العدد العشري هو عدد كسري يمكن تمثيله بكسر عشري . أي هو عدد كسري مقامه من الشكل : 2×5^u حيث : ن ؛ ه عددان طبيعيين .

مثال 1 : الكسور العشرية : $\frac{17}{10}$ ؛ $\frac{21}{100}$ ؛ $\frac{19}{1000}$ ؛ تمثل أعدادا عشرية .

مثال 2 : كل من : $\frac{1}{2}$ ؛ 1 ؛ 2 ؛ $\frac{3}{5}$ ؛ $\frac{7}{5 \times 2}$ ؛ $\frac{3}{5 \times 2^2}$ ؛ $\frac{9}{5 \times 2^3}$ هو عدد عشري .

كل من : $\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{4}{15}$ ؛ $\frac{5}{7}$ ؛ $\frac{16}{30}$ هو عدد غير عشري .

3 (مقارنة الأعداد الكسرية

نذكر فيما يلي بالخواص التالية :

$$\begin{aligned} & \frac{ا}{ب} \text{ و } \frac{ج}{د} \text{ عددان كسريان} \\ & \frac{ج}{د} = \frac{ا}{ب} \text{ معناه : } ا \times د = ب \times ج \\ & \frac{ج}{د} < \frac{ا}{ب} \text{ معناه : } ا \times د < ب \times ج \\ & \frac{ج}{د} > \frac{ا}{ب} \text{ معناه : } ا \times د > ب \times ج \end{aligned}$$

مثال :

لنقارن بين الأعداد الكسرية :

$$\frac{8}{7} ; \frac{15}{6} ; \frac{3}{4} ; \frac{5}{2}$$

لدينا : $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ لأن : $15 \times 2 = 6 \times 5$

لأن : $3 \times 2 < 4 \times 5$ $\frac{3}{4} < \frac{2}{5}$

لأن : $8 \times 4 > 7 \times 3$ $\frac{8}{7} > \frac{3}{4}$

3 . جمع الأعداد الكسرية

(ا) مجموع كسرين
قاعدة

لحساب مجموع الكسرين $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ج}{د}$ نوجد مقاميهما ثم نجمع بسطي

الكسرين الناتجين أي :

$$\frac{ا}{ب} + \frac{ج}{د} = \frac{اد + جب}{ب د}$$

• وعملنا نختار أصغر مقام موحد للكسرين وهو : م م ا لمقاميهما .

مثال 1 : لنحسب المجموع : $\frac{5}{7} + \frac{3}{7}$

$$\frac{5}{7} \text{ و } \frac{3}{7} \text{ لهما نفس المقام إذن :}$$

$$\frac{8}{7} = \frac{5+3}{7} = \frac{5}{7} + \frac{3}{7}$$

مثال 2::
 $\frac{13}{8} + \frac{5}{12}$ لنحسب المجموع :

نوحد مقامي الكسرين $\frac{13}{8}$ و $\frac{5}{12}$

لدينا : $2^2 = 8$ و $3^2 \times 2 = 12$

إذن : م م أ (8 ؛ 12) $24 = 3 \times 8 = 2 \times 12$

ومنه : $\frac{3 \times 13}{3 \times 8} + \frac{2 \times 5}{2 \times 12} = \frac{13}{8} + \frac{5}{12}$

$$\frac{39}{24} + \frac{10}{24} =$$

$$\frac{24}{24}$$

$$\frac{39 + 10}{24} =$$

$$\frac{24}{24}$$

$$\frac{49}{24} =$$

$$\frac{24}{24}$$

(2) خواص جمع الأعداد الكسرية

• نذكر فيما يلي بالخواص التالية :

مهما كانت الكسور : $\frac{ا}{ب}$ ؛ $\frac{ج}{د}$ ؛ $\frac{هـ}{ي}$ فإن :

$$\frac{ا}{ب} + \frac{ج}{د} = \frac{ج}{د} + \frac{ا}{ب} \quad \bullet$$

(التبديل)

$$\left(\frac{ا}{ب} + \frac{ج}{د} \right) + \frac{هـ}{ي} = \frac{هـ}{ي} + \left(\frac{ا}{ب} + \frac{ج}{د} \right) \quad \bullet$$

(التجميع)

$$\frac{ا}{ب} = 0 + \frac{ا}{ب} \quad \bullet$$

(العدد 0 عنصر حيادي بالنسبة إلى الجمع)

مثال :

$$\text{لنحسب المجموع : } 6 + \frac{5}{3} + 4 + \frac{3}{2}$$

$$\text{لدينا : } 6 + \frac{5}{3} + 4 + \frac{3}{2} = \left(6 + 4 \right) + \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2} \right) \quad \text{(تبديل وتجميع)}$$

$$10 + \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2} \right) =$$

$$10 + \left(\frac{2 \times 5}{2 \times 3} + \frac{3 \times 3}{3 \times 2} \right) =$$

$$10 + \left(\frac{10}{6} + \frac{9}{6} \right) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{10}{1} + \frac{19}{6} = \\ & \frac{6 \times 10}{6 \times 1} + \frac{19}{6} = \\ & \frac{60 + 19}{6} = \\ & \frac{79}{6} = \end{aligned}$$

4. طرح الأعداد الكسرية

(1) فرق كسرين
قاعدة

لحساب فرق الكسرين $\frac{ا}{ب} - \frac{ج}{د}$ و $\frac{ج}{د} - \frac{ا}{ب}$ حيث : $\frac{ا}{ب} \leq \frac{ج}{د}$

نوجد مقاميهما ثم نحسب فرق بسطي الكسرين الناتجين أي :

$$\frac{ا}{ب} - \frac{ج}{د} = \frac{اد - جب}{ب د}$$

• عمليا نختار أصغر مقام موحد الكسرين وهو : م المماثيهما .

لنحسب الفرق :

$$\frac{18}{16} - \frac{11}{6}$$

اختزال الكسر ؛ $\frac{18}{16} = \frac{9}{8}$ ، $\frac{11}{6} = \frac{11}{6}$

$$\frac{9}{8} - \frac{11}{6} = \frac{18}{16} - \frac{11}{6} \quad \text{إذن :}$$

توحيد المقامين : 6 و 8 ،

$$\frac{3}{2} = 8 \quad \text{و} \quad 3 \times 2 = 6$$

فأصغر مقام موحد للكسرين هو 6 (8 ؛ 6) أي : $24 = 3 \times 8$

$$\frac{9}{8} - \frac{11}{6} = \frac{18}{16} - \frac{11}{6} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\begin{array}{r} 3 \times 9 \quad 4 \times 11 \\ \hline 3 \times 8 \quad 4 \times 6 \\ 27 \quad 44 \\ \hline 24 \quad 24 \\ 27 - 44 \\ \hline = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 17 \\ \hline 24 \\ 10 \end{array}$$

مثال 2: لنحسب الفرق : $2 - \frac{10}{3}$

$$\frac{2}{1} - \frac{10}{3} = 2 - \frac{10}{3} \quad \text{أدينا :}$$

$$\frac{2}{1} \quad \text{و} \quad \frac{10}{3} \quad \text{توحيد مقامي الكسرين :}$$

أصغر مقام موحد هو 3 وبالتالي :

$$\begin{aligned} \frac{3 \times 2}{3 \times 1} - \frac{10}{3} &= 2 - \frac{10}{3} \\ \frac{6}{3} - \frac{10}{3} &= \\ \frac{4}{3} &= \end{aligned}$$

ملاحظة :

طرح الأعداد الكسرية غير تبديلي وغير تجميعي .

5 . ضرب الأعداد الكسرية

(1) جداء كسرين قاعدة

لحساب جداء الكسرين $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ج}{د}$ نضرب البسطين في بعضهما والمقامين في بعضهما أي :

$$\frac{ا \cdot ج}{ب \cdot د} = \frac{ج}{د} \times \frac{ا}{ب}$$

مثال 1 :

$$\frac{11}{5} \times \frac{7}{9} : \text{لنحسب الجداء}$$

$$\frac{77}{45} = \frac{11 \times 7}{5 \times 9} = \frac{11}{5} \times \frac{7}{9} : \text{لدينا}$$

$$\bullet \quad \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ج}}{\text{د}} \right) \times \frac{\text{هـ}}{\text{ي}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \left(\frac{\text{ج}}{\text{د}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{ي}} \right) \quad (\text{الضرب تجميعي})$$

$$\bullet \quad \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = 1 \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \quad (\text{العنصر 1 حيادي بالنسبة إلى الضرب})$$

$$\bullet \quad \frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{د}} \right) \times \frac{\text{هـ}}{\text{ي}} \quad (\text{الضرب توزيعي بالنسبة إلى الجمع})$$

$$\bullet \quad \frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{د}} \right) \times \frac{\text{هـ}}{\text{ي}} \quad (\text{الضرب توزيعي بالنسبة إلى الطرح})$$

$$\bullet \quad 0 = 0 \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

أمثلة:

$$\bullet \quad \frac{1}{1} \times \frac{3}{5} = 1 \times \frac{3}{5}$$

$$\frac{1 \times 3}{1 \times 5} =$$

$$\frac{3}{5} =$$

$$\frac{3}{5} =$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\bullet \quad \left(\frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{4} \right) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1}{2 \times 4} =$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{24} =$$

(بالتوزيع)

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{5} \bullet$$

$$\frac{1 \times 1}{3 \times 5} + \frac{1 \times 1}{2 \times 5} =$$

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} =$$

$$\frac{2 \times 1}{2 \times 15} + \frac{3 \times 1}{3 \times 10} =$$

$$\frac{2}{30} + \frac{3}{30} =$$

$$\frac{2 + 3}{30} =$$

$$\frac{5}{30} =$$

$$\frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{6} =$$

6. قسمة الأعداد الكسرية

حاصل قسمة كسرين
قاعدة

$$\frac{\frac{ا}{ب}}{\frac{ج}{د}} = \frac{ا}{ب} \div \frac{ج}{د} = \frac{ا}{ب} \times \frac{د}{ج}$$

لقسمة الكسر $\frac{ا}{ب}$ على الكسر غير المعدوم $\frac{ج}{د}$ نضرب الكسر $\frac{ا}{ب}$ في مقلوب الكسر $\frac{ج}{د}$.

أي:

مثال 1 : لنقسم الكسر $\frac{3}{7}$ على الكسر $\frac{2}{5}$

لدينا : $\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{2}$

$$\frac{5 \times 3}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$$

مثال 2 : لنقسم $\frac{10}{21}$ على $\frac{15}{14}$

لدينا : $\frac{10}{21} \div \frac{15}{14} = \frac{10}{21} \times \frac{14}{15}$

$$\frac{14 \times 10}{15 \times 21} =$$

$$\frac{(7 \times 2)(5 \times 2)}{(5 \times 3)(7 \times 3)} =$$

$$\frac{(7 \times 5) \times 2^2}{(5 \times 3)(7 \times 3)} =$$

$$\frac{(7 \times 5) \times 2^2}{(5 \times 7) \times 3^2} =$$

$$\frac{2^2}{3^2} =$$

$$\frac{4}{9}$$

7- تطبيقات

1 (مجموع عدة أعداد كسرية

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{5} + \frac{12}{15} : \text{لنحسب المجموع :}$$

(تحليل) $\frac{2 \times 2}{2 \times 5} + \frac{3}{5} + \frac{3 \times 4}{3 \times 5} = \frac{4}{10} + \frac{3}{5} + \frac{12}{15} : \text{لدينا :}$

(اختزال)

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{4}{10} + \frac{3}{5} + \frac{12}{15}$$

(تجميع)

$$\frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) =$$

(جمع كسرين)

$$\frac{2}{5} + \frac{3+4}{5} =$$

(جمع كسرين)

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} =$$

$$\frac{9}{5} =$$

وبصفة عامة :

قاعدة

لإيجاد مجموع عدة أعداد كسرية :

- نختزل الكسور الممثلة لها إن أمكن .
- نوحّد مقامات الكسور المختزلة .
- نحتفظ بالمقام المشترك ونجمع بسوط الكسور الناتجة .

(2) جداء عدة أعداد كسرية

$$\frac{6}{15} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} : \text{لنحسب الجداء}$$

(الضرب تجميعي)

$$\frac{6}{15} \times \left(\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \right) = \frac{6}{15} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} : \text{لدينا}$$

$$\frac{6}{15} \times \frac{4 \times 3}{9 \times 8} =$$

(تحليل)

$$\begin{array}{r}
 6 \times 4 \times 3 \\
 \hline
 15 \times 9 \times 8 \\
 \begin{array}{cc}
 2 & 3 \\
 3 & \times 2
 \end{array} \\
 \hline
 5 \times 3 \times 2 \\
 \begin{array}{c}
 3 \quad 3 \\
 1 \\
 \hline
 5 \times 3 \\
 1 \\
 \hline
 15
 \end{array}
 \end{array}$$

وبصفة عامة :

قاعدة

جداء عدة أعداد كسرية هو عدد كسري بسطة جداء بسوط الكسور الممثلة لها ومقامه جداء مقاماتها .

(مثال : جداء كسرين في مقام واحد)

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 9 \times \frac{\quad}{25} : \text{لنحسب الجداء :} \\
 \frac{9}{1} \times \frac{4}{25} = 9 \times \frac{4}{25} : \text{لدينا :} \\
 \frac{9 \times 4}{1 \times 25} = \\
 \frac{36}{25} =
 \end{array}$$

$$\left(9 = \frac{9}{1} \right)$$

$$\frac{ا \times ج}{ب} = ج \times \frac{ا}{ب}$$

وبصفة عامة :

(4) قسمة عدد كسري على عدد طبيعي

$$4 \div \frac{12}{11} \text{ : لنحسب حاصل القسمة :}$$

$$\frac{4}{1} \div \frac{12}{11} = 4 \div \frac{12}{11} \text{ : لدينا}$$

(قسمة كسر على آخر)

$$\frac{4}{1} \times \frac{11}{12} =$$

$$\frac{4 \times 11}{1 \times 12} =$$

$$\frac{4 \times 11}{12} =$$

$$\frac{44}{4 \times 3} =$$

$$\frac{4 \times 11}{3} = \frac{44}{3}$$

(اختزال)

$$\frac{ا}{ب \cdot ج} = ج \div \frac{ا}{ب}$$

وبصفة عامة :

8 - تمارين محلولة

تمرين 1

$$\frac{3}{5} - \frac{5}{6} + \frac{17}{45} = \text{ك} :$$

الحل

لحساب ك نجري العمليات حسب ترتيبها ، أي نجمع $\frac{5}{6}$ و $\frac{17}{45}$ ثم نطرح $\frac{3}{5}$ من الناتج .

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{17}{45} \right) - \frac{3}{5} = \text{ك} \quad \text{فيكون : ك}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{17}{45} = \frac{25}{30} + \frac{34}{90} = \frac{50}{90} + \frac{34}{90} = \frac{84}{90} = \frac{14}{15}$$

$$\frac{14}{15} - \frac{3}{5} = \frac{14}{15} - \frac{9}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{109}{90} \right) - \frac{18 \times 3}{18 \times 5} = \text{ك}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{109}{90} = \frac{36}{180} + \frac{218}{180} = \frac{254}{180} = \frac{127}{90}$$

$$\frac{127}{90} - \frac{18 \times 3}{18 \times 5} = \frac{127}{90} - \frac{36}{90} = \frac{91}{90}$$

$$\frac{91}{90} - \frac{18 \times 3}{18 \times 5} = \frac{91}{90} - \frac{36}{90} = \frac{55}{90} = \frac{11}{18}$$

$$\frac{5 \times 11}{90} =$$

$$\frac{11}{18} = \frac{11}{18} \quad \text{(الكسر غير قابل للاختزال)}$$

$$\frac{11}{18} = \text{إذن : ك}$$

تمرين 2

صرف شخص $\frac{1}{12}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{20}$ من ماله .

- (1) عين الكسر الذي يمثل هذه المصاريف .
- (2) ما هو الكسر الذي يمثل الباقي من المال ؟
- (3) إذا كان المبلغ الباقي هو 3700 دج فما هو مبلغ المال الأصلي ؟

الحل

(1) الكسر الذي يمثل هذه المصاريف هو :

$$\frac{5}{60} + \frac{15}{60} + \frac{3}{60} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{23}{60} =$$

(2) تعيين الكسر الذي يمثل المبلغ الباقي :

$$\frac{60}{60} - \frac{23}{60} = \frac{37}{60}$$

بما أن المصاريف يمثلها الكسر $\frac{23}{60}$ فإن المبلغ الكلي يمثلته الكسر $\frac{37}{60}$

وبالتالي فإن المبلغ الباقي يمثل الفرق $(\frac{23}{60} - \frac{60}{60})$ ومنه الكسر الذي يمثل المبلغ

الباقي من المال هو $\frac{37}{60}$

(3) حساب المبلغ الأصلي :

ليكن م هو المبلغ الأصلي
الباقي من كل المال م هو الكسر $\frac{37}{60}$

الكسر $\frac{37}{60}$ يمثل الجزء الباقي من المال ، أي الباقي هو 37 جزءا من 60 جزء

وبالتالي ، المبلغ الكلي م يمثل 60 جزءا . ولدينا : 3700 تمثل 37 جزءا من المال م .
فالجزء الواحد من المال يمثل الكسر $\frac{3700}{37}$.

$$\frac{60 \times 3700}{37} = 60 \times \frac{3700}{37} = \text{إن : م}$$

م = 6000 دج .

1 عين الكسور المتكافئة من بين الكسور التالية :

$$\frac{2}{3} ; \frac{5}{15} ; \frac{1}{14} ; \frac{15}{18} ; \frac{14}{49} ; \frac{7}{6}$$

168

2 ما هو الكسر غير القابل للاختزال المكافئ للكسر $\frac{168}{280}$ ؟

280

168

- عين خمسة كسور مكافئة للكسر $\frac{168}{280}$ بحيث تكون مقاماتها أصغر ما يمكن ؟ .

280

85

3 نطرح العدد 20 من بسط الكسر $\frac{102}{85}$. ما هو العدد الذي يجب أن يطرح

102

من مقام هذا الكسر لكي نحصل على كسر مكافئ له ؟ .

112

4 أضيف العدد 36 إلى مقام الكسر $\frac{112}{144}$. ما هو العدد الذي يجب أن نضيفه

112

144

إلى البسط لكي نحصل على كسر يكافئ $\frac{112}{144}$ ؟ .

144

مقارنة الكسور

5 اختزل الكسور التالية ، إن أمكن ، ثم رتبها تصاعدياً :

$$\frac{5}{13} ; \frac{17}{13} ; \frac{7}{13} ; \frac{9}{13} ; \frac{4}{13}$$

$$\frac{30}{51} ; \frac{20}{68} ; \frac{23}{23} ; \frac{64}{34} ; \frac{35}{85}$$

6 اختزل الكسور التالية ، إن أمكن ، ثم رتبها تنازليا :

$$\begin{array}{ccccc} 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ \hline & & & & \\ \hline 9 & 4 & 8 & 7 & 15 \\ 14 & 49 & 28 & 12 & 56 \\ \hline & & & & \\ \hline 20 & 21 & 52 & 12 & 40 \end{array} \quad \bullet$$

جمع الأعداد الكسرية وطرحها

تعطى النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال

7 أحسب كلامن المجاميع التالية :

$$7 + \frac{2}{3} ; \frac{2}{5} + 3 ; \frac{3}{4} + \frac{9}{2} ; \frac{4}{11} + \frac{3}{11}$$

8 احسب بطريقتين ، كلامن المجاميع التالية :

$$\frac{12}{95} + \frac{3}{38} + \frac{16}{19} ; \frac{4}{10} + \frac{3}{5} + \frac{12}{15} ; \frac{6}{18} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$$

9 احسب بطريقتين ، كلامن المجاميع التالية :

$$\frac{25}{30} + \frac{9}{12} + \frac{4}{14} ; \frac{3}{10} + \frac{10}{24} + \frac{2}{15}$$

$$\frac{37}{1000} + \frac{14}{20} + \frac{12}{500} ; \frac{113}{1000} + \frac{3}{10} + \frac{45}{100}$$

10 احسب المجاميع التالية (ا، ب عدنان طبيعيان، $a \neq 0$) :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} ; \frac{1}{2} + 4 ; 1 + \frac{1}{3} ; \frac{1}{5} + 3$$

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{b} ; \frac{3}{7} + \frac{2}{a} ; \frac{2}{19} + \frac{1}{5} ; \frac{5}{30} + \frac{2}{16} ; \frac{2}{13}$$

11 احسب كلامن الفروق التالية :

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} ; 2 - \frac{13}{5} ; \frac{2}{3} - 3 ; \frac{7}{15} - \frac{16}{15}$$

$$\frac{6}{55} - \frac{8}{33} ; \frac{2}{35} - \frac{4}{21} ; \frac{3}{10} - \frac{5}{6} ; \frac{2}{3} - \frac{11}{12}$$

$$\frac{4}{10} - \frac{81}{100} ; \frac{143}{1000} - \frac{57}{100}$$

12 احسب كلامن الفروق التالية (ا، ب عدنان طبيعيان، $a \neq 0$ وبفرض

إمكانية الطرح في كل حالة) :

$$\frac{15}{12} - \frac{18}{15} ; \frac{1}{6} - \frac{12}{3} ; \frac{1}{a} - 2 ; 2 - \frac{1}{3} ; \frac{1}{5} - 4$$

$$\frac{b}{a} - 1 ; 2 - \frac{1}{b} ; \frac{b}{a} - 1 ; \frac{2}{3} - \frac{5}{a} ; \frac{5}{4} + \frac{13}{7}$$

• ضرب الأعداد الكسرية وقسعتها

أحسب كلا من الجداءات التالية ، واختزل النتائج إن أمكن :

13

$$9 \times \frac{7}{36} ; 5 \times \frac{4}{25} ; 13 \times \frac{5}{9} ; 4 \times \frac{3}{7}$$

$$\frac{3}{45} \times 12 ; \frac{11}{24} \times 9 ; \frac{7}{18} \times 5 ; \frac{6}{7} \times 2 ; \frac{5}{11} \times 3 ; 6 \times \frac{3}{8}$$

أحسب كلا من الجداءات التالية ، واختزل النتائج إن أمكن :

14

$$\frac{15}{18} \times \frac{12}{20} ; \frac{25}{12} \times \frac{8}{15} ; \frac{5}{9} \times \frac{7}{10} ; \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} ; \frac{5}{7} \times \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{45} \times 12 ; \frac{11}{24} \times 9 ; \frac{7}{18} \times 5 ; \frac{6}{7} \times 2 ; \frac{5}{11} \times 3 ; 6 \times \frac{3}{8}$$

أحسب بطريقتين كلا من الجداءات التالية ، ثم اختزل النتائج إن أمكن :

15

$$\frac{6}{15} \times \frac{11}{7} \times \frac{3}{8} ; \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} ; \frac{7}{5} \times \frac{4}{11} \times \frac{2}{3}$$

$$\frac{12}{11} \times \frac{22}{15} \times \frac{10}{8} ; \frac{35}{12} \times \frac{6}{14} \times \frac{4}{9}$$

16 أحسب كلا من الجداءات التالية ، ثم اختزل النتائج إن أمكن ، علما بأن
أ عدد طبيعي غير معدوم :

$$\begin{aligned} & 12 \text{ ب } \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} ; \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} ; \frac{1}{10} \times \frac{3}{1} ; \frac{2}{3} \times \frac{2}{\pi} \\ & \frac{4}{17} \times \frac{15}{12} ; \frac{10}{9} \times \frac{13}{5} ; \frac{15}{12} \times \frac{4}{3} ; \frac{2}{5} \times \frac{14}{5} \text{ ب} \end{aligned}$$

17 أحسب كلا من الجداءات التالية ، علما بأن أ ؛ ب ؛ ج أعداد طبيعية
غير معدومة ، ثم اختزل النتائج إن أمكن :

$$\begin{aligned} & 12 \text{ ب } \frac{1}{3} \times \frac{6}{8} ; \frac{21}{6} \times \frac{1}{5} ; \frac{9}{12} \times \frac{1}{3} ; \frac{2}{4} \times \frac{5}{5} \\ & \frac{1}{12} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} \text{ ب} \end{aligned}$$

18 أحسب الحواصل التالية ، ثم اختزل النتائج إن أمكن :

$$\begin{aligned} & 6 \div \frac{10}{13} ; 4 \div \frac{12}{11} ; 3 \div \frac{9}{10} ; 3 \div \frac{5}{7} ; 2 \div \frac{3}{4} \\ & \frac{5}{2} \div 10 ; \frac{24}{7} \div 8 ; \frac{2}{5} \div 6 ; \frac{1}{4} \div 3 \end{aligned}$$

19 احسب الحواصل التالية ، ثم اختزل النتائج إن أمكن :

$$\frac{10}{14} + \frac{10}{21} ; \frac{3}{7} + \frac{2}{5} ; \frac{1}{5} + \frac{2}{2} ; \frac{3}{5} + \frac{1}{4}$$

• بأي كسر يجب أن نضرب العدد 5 لكي نحصل على :

$$\frac{7}{12} ; \frac{20}{9} ; \frac{5}{21} ; \frac{5}{8} ; \frac{5}{9}$$

20 احسب بطريقتين كلامن :

$$\frac{5}{7} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} \right) ; \left(3 + \frac{11}{2} \right) \times 7 ; \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{2} \right) \times \frac{4}{6}$$

$$\left(2 + \frac{4}{3} + \frac{3}{4} \right) \times \frac{7}{11} ; \left(6 + \frac{1}{7} + \frac{3}{7} \right) \times 5 ; \frac{10}{3} \times \left(\frac{9}{4} + \frac{2}{5} \right)$$

$$\frac{6}{13} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

21 احسب بطريقتين كلامن :

$$\left(\frac{16}{24} - \frac{7}{3} \right) \times 9 ; \left(\frac{2}{5} - \frac{19}{30} \right) \times \frac{6}{4} ; \left(\frac{2}{7} - \frac{3}{4} \right) \times \frac{14}{3}$$

$$\frac{2}{5} \times \left(3 - \frac{13}{4} \right) ; \frac{5}{9} \times \left(\frac{7}{10} - \frac{3}{2} \right) ; \frac{5}{7} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{5} \right)$$

احسب كلام من :

$$\begin{array}{cccc} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} - 3 & \frac{3}{2} + \frac{7}{10} & \frac{3}{5} - 2 \\ \hline & & & \\ \frac{2}{5} + 1 & 1 - \frac{18}{10} & \frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{3} - \frac{8}{4} + \frac{1}{18} & \frac{1}{4} - 4 & \frac{21}{5} \\ \hline & & \\ \frac{8}{4} - \frac{5}{3} + \frac{13}{18} & 4 + \frac{1}{3} & \frac{12}{5} + \frac{27}{35} \\ \hline \end{array}$$

1. أنشطة تمهيدية

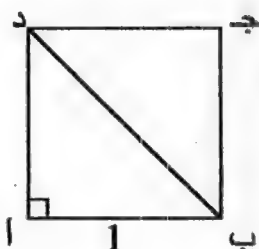
نشاط 1 :

← (م ؛ و) معلم للمستقيم (ق) (الشكل)



1. عين فواصل النقاط أ ، ب ، ج .
هل هذه الفواصل أعداد طبيعية ؟ هل هي أعداد صحيحة ؟
2. عين فواصل النقاط 'أ' ، 'ب' ، 'ج' نظائر أ ، ب ، ج على التوالي بالنسبة إلى المبدأ م .
• هل هذه الفواصل هي أعداد طبيعية ؟
• هل هي أعداد صحيحة ؟
3. عين فاصلة النقطة هـ منتصف القطعة [ب ج] .
ما هي طبيعة هذا العدد ؟ هل هو عدد طبيعي ؟ هل هو عدد صحيح ؟
هل هو عدد ناطق ؟

نشاط 2 :



- أ ب ج د مربع طول ضلعه 1
- في المثلث القائم أ ب د لدينا : $ب د^2 = ب أ^2 + أ د^2$
- احسب ب د ² ثم استنتج طول القطر ب د .
- هل هذا العدد الناتج طبيعي ؟
- هل هو صحيح ؟ ناطق ؟ أصم ؟

النشاطان السابقان يذكران بأنواع الأعداد التي درستها في السنوات السابقة و هي :

- مجموعة الأعداد الطبيعية : $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة $\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \}$

• توجد أعداد لا يمكن تمثيلها بكسر مثل: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \dots$ هذه الأعداد تسمى أعدادا صماء

• و تسمى المجموعة المتكونة من الأعداد الناطقة والأعداد الصماء مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R}

2. العمليات في \mathbb{R}

نذكر فيما يلي بخواص الجمع و الضرب في \mathbb{R}

(1) خواص الجمع في \mathbb{R} :

a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية

- التبديل : $a + b = b + a$

- التجميع : $(a + b) + c = a + (b + c)$

- 0 هو العنصر المحايد بالنسبة للجمع : $a + 0 = a$

- لكل عدد حقيقي أنظير هو : $(-a)$ أي $a + (-a) = 0$

(2) خواص الضرب في \mathbb{R} : a, b, c ثلاث أعداد حقيقية

- التبديل : $a \times b = b \times a$

- التجميع : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

1 هو العنصر المحايد بالنسبة للضرب أي : $a \times 1 = a$

لكل عدد حقيقي غير معدوم a نظير بالنسبة للضرب هو $\frac{1}{a}$:
 $a \times \frac{1}{a} = 1$ ، $\left(\frac{1}{a}\right)$ يسمى مقلوب a)

الضرب توزيعي على الجمع :
 $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

(3) قواعد الحساب في ح
 • انعدام جداء عددين حقيقيين

a و b عددان حقيقيان ، لدينا : $a \times b = 0$ يعني : $a = 0$ أو $b = 0$

• قواعد الإشارة :

$$\begin{aligned}
 a(-b) &= -(ab) & * \\
 (-a)b &= -(ab) & * \\
 (-a)(-b) &= ab & * \\
 -a - b &= -(a + b) & * \\
 -a + b &= -(a - b) & * \\
 a - b &= a + (-b) & * \\
 a + b &= a - (-b) & * \\
 \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} &= \frac{1}{ab} & *
 \end{aligned}$$

(4) قوى عدد حقيقي

a عدد حقيقي ، n عدد طبيعي غير معدوم .
 القوة النونية للعدد a هي الجداء :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$$

a^n هو رمز القوة النونية للعدد a .

أ هو أساس القوة وَ ن أس القوى .

إصطلاح :

$$1 = \overset{0}{1}, \quad 0 = \overset{0}{0}$$

$$(0 \neq 1) \quad \frac{1}{1} = \overset{1-}{1}, \quad \frac{1}{1} = \overset{0-}{1}$$

أمثلة :

$$(5-)(5-)(5-) = \overset{3}{(5-)} \bullet$$

$$125 - =$$

$$\frac{1}{125} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{\overset{3}{5}} = \overset{3-}{5} \bullet$$

$$1 = 1 \times \dots \times 1 \times 1 = \overset{0}{1} \bullet$$

← ن مملأ →

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا كان } n \text{ زوجيا} \\ 1- \text{ إذا كان } n \text{ فرديا} \end{array} \right\} = \overset{n}{(1-)} \bullet$$

• خواص :

أ ، ب عدنان حقيقيان غير معدومين . ن ، ه عدنان صحيحان .
لدينا الخواص التالية :

الخاصية	مثال
$\overset{ن}{ا}^{\overset{ن}{ا}+\overset{ن}{ب}} = \overset{ن}{ا}^{\overset{ن}{ا}} \times \overset{ن}{ا}^{\overset{ن}{ب}}$	$\overset{4}{3} = \overset{(2-)+6}{3} = \overset{2-}{3} \times \overset{6}{3}$
$\overset{ن}{ا}^{\overset{ن}{ا}} = \overset{ن}{\left(\overset{ن}{ا} \right)}$	$\overset{6-}{5} = \overset{(2-)\times 3}{5} = \overset{2-}{\left[\overset{3}{5} \right]}$
$\overset{ن}{ب} \times \overset{ن}{ا} = \overset{ن}{(ب \times ا)}$	$\overset{3}{(10-)} = \overset{3}{[5 \times (2-)]} = \overset{3}{5} \times \overset{3}{(2-)}$
$\frac{\overset{ن}{ا}}{\overset{ن}{ب}} = \overset{ن}{\left(\frac{ا}{ب} \right)}$	$\frac{1}{9} = \frac{\overset{2}{1}}{\overset{2}{3}} = \overset{2}{\left(\frac{1}{3} \right)}$

• الجداءات الشهيرة

من أجل كل عددين حقيقيين أ ، ب لدينا :

$$\begin{aligned}
 & \bullet \overset{2}{(ا + ب)} = \overset{2}{ا} + \overset{2}{ب} \\
 & \bullet \overset{2}{(ا - ب)} = \overset{2}{ا} - \overset{2}{ب} \\
 & \bullet \overset{2}{(ا + ب)} (ا - ب) = \overset{2}{ا} - \overset{2}{ب} \\
 & \bullet \overset{3}{(ا + ب)} = \overset{3}{ا} + \overset{3}{ب} \\
 & \bullet \overset{3}{(ا - ب)} = \overset{3}{ا} - \overset{3}{ب} \\
 & \bullet \overset{3}{(ا + ب)} (ا - ب) = \overset{2}{ا} - \overset{2}{ب} \\
 & \bullet \overset{3}{(ا - ب)} (ا + ب) = \overset{2}{ا} - \overset{2}{ب}
 \end{aligned}$$

5. الجذر التربيعي

• لدينا $\overset{2}{25} = (5 +)$ و $\overset{2}{25} = (5 -)$ العدد 25 هو مربع لكل من العدد المتعاكسين $(5 +)$ و $(5 -)$.

$(5 +)$ يسمى الجذر التربيعي للعدد 25 ونرمز إليه بالرمز $\sqrt{25}$

تعريف :

أ عدد حقيقي موجب .
الجزر التربيعي للعدد أ هو العدد الحقيقي الموجب ب بحيث :

$$b^2 = a, \text{ ونكتب : } b = \sqrt{a}$$

العدد $\sqrt{4}$ هو العدد الموجب 2 ونكتب $2 = \sqrt{4}$

$\sqrt{4} \neq -2$ لأن -2 ليس موجبا
وهكذا :

$$1 = \sqrt{1}, 0 = \sqrt{0}, 5 = \sqrt{25}, 4 = \sqrt{16}, 3 = \sqrt{9}$$

• : أ؛ ب عددان موجبان كيفيان

$\sqrt{6} \times \sqrt{4} = \sqrt{6 \times 4} = \sqrt{24}$ $\sqrt{6} \sqrt{2} =$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
$\frac{5}{3} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{25}}{3}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0)$
$\sqrt{15} \times \sqrt{16} = \sqrt{15 \times 16}$ $\sqrt{15} \times 4 =$	$\sqrt{a} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{a}{2}} \quad \sqrt{2} \sqrt{a} = \sqrt{2a}$

(أ) حذف الأقواس

• لنحسب العدد الحقيقي : ك $(47 + 4) - (13 -) - 153 =$

لدينا : ك $(47 + 4) - (13 -) - 153 =$

حساب المجموع $(47 + 4)$ $(51) - (13 -) - 153 =$

(حذف الأقواس) $51 - 13 + 153 =$

$51 - 166 =$

$115 =$ ك

• لنحسب العبارة الجبرية :

ل $2 = (س - 2 + ع 3) - (5 س - 4) (ع + \frac{3}{2})$

لدينا :

ل $2 = 5 س - 6 + ع 4 - (س \frac{15}{2} + ع 4 - 6)$

$2 = 5 س - 6 + ع 4 - س \frac{15}{2} - ع 4 + 6$

$(2 س - س \frac{15}{2}) + (ع 4 - ع 4) - (6 - 6) =$

$12 + ع 5 س - ع 0 + (س \frac{15}{2} - س \frac{4}{2}) =$

$12 + ع 5 س - س \frac{11}{2} =$ ل

قواعد:

حذف القوس المسبوق بالإشارة (-) يستلزم تغيير إشارة ما بداخل القوس ، أي

$$-(a + b) = -a - b$$

$$-(a - b) = -a + b$$
 وحذف القوس المسبوق بالإشارة (+) لا يتطلب أي تغيير .

2) استعمال الجداءات الشهيرة :

لنحسب بإستعمال الجداءات الشهيرة كلا من : $2 62$ ، $2 49$ ، 91×89 ، $2 999 - 2 1001$

لدينا :

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2 (2 + 60) &= 2 62 \\ 2^2 2 + (60 \times 2) 2 + 2 60 &= \\ 4 + 240 + 3600 &= \\ 3844 &= 2 62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2 (1 - 50) &= 2 49 \\ 2^2 1 + (50 \times 1) 2 - 2 50 &= \\ 1 + 100 - 2500 &= \\ 2401 &= 2 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (1 + 90)(1 - 90) &= 91 \times 89 \\ 2^2 1 - 2 90 &= \\ 1 - 8100 &= \\ 8099 &= 91 \times 89 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (999 - 1001)(999 + 1001) &= 2 999 - 2 1001 \\ 2 \times 2000 &= \\ 4000 &= 2 999 - 2 1001 \end{aligned}$$

3 (تحويل كسر مقامه عدد أصم إلى كسر مقامه عدد ناطق

3

• لنبحث عن كسر مكافئ للكسر $\frac{3}{5\sqrt{4} + 4}$ ومقامه عدد ناطق .

لاحظ أن المقام $5\sqrt{4} + 4$ هو عدد غير ناطق .

العدد $5\sqrt{4} - 4$ يسمى مرافق العدد $5\sqrt{4} + 4$

و الجداء $(5\sqrt{4} - 4)(5\sqrt{4} + 4) = 5^2 \cdot 4 - 16 = 5 - 16 = -11$ هو عدد ناطق .

فبضرب حدي الكسر $\frac{3}{5\sqrt{4} + 4}$ في مرافق المقام وهو $5\sqrt{4} - 4$ نحصل على :

$$\frac{5\sqrt{4} - 12}{5 - 16} = \frac{(5\sqrt{4} - 4) \cdot 3}{(5\sqrt{4} - 4)(5\sqrt{4} + 4)} = \frac{3}{5\sqrt{4} + 4}$$

$$\frac{5\sqrt{4} - 12}{-11} = \frac{3}{5\sqrt{4} + 4}$$

وهكذا وجدنا كسرا مقامه عدد ناطق يكافئ الكسر : $\frac{3}{5\sqrt{4} - 4}$

قاعدة :

لإيجاد كسر مقامه ناطق و يكافئ كسرا مقامه أصم ، نضرب البسط والمقام في مرافق المقام

• ا ، ب عدنان حقيقيان موجبان :

كل من العددين $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ هو مرافق الآخر

و كل من العددين $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ هو مرافق الآخر

4 (مقارنة عددين أصميين

لنقارن بين العددين الحقيقيين :

$$1 - \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \sqrt{3} - 2$$

لندرس إشارق الفرق $(1 - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - 2)$
لدينا :

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} - 3 = (1 - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - 2)$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 3 =$$

$$\frac{[(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 3][(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 3]}{}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 3$$

(ضرب وقسمة العدد في مرافقه)

$$\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 9}{}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 3$$

$$\frac{(2 + 6\sqrt{2} + 3) - 9}{}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 3$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{6\sqrt{2} - 4}{(2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + 3} = \\
 & \frac{(6\sqrt{2} + 2)(6\sqrt{2} - 2)2}{(6\sqrt{2} + 2)((2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + 3)} = \\
 & \frac{(6 - 4)2}{(6\sqrt{2} + 2)((2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + 3)} = \\
 & 0 > \frac{4 -}{(6\sqrt{2} + 2)((2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + 3)} =
 \end{aligned}$$

(لأن البسط سالب والمقام موجب)

فالفرق $(3\sqrt{2} - 2) - (1 - 2\sqrt{2})$ سالب ومنه العدد $(3\sqrt{2} - 2)$ أصغر

من العدد $(1 - 2\sqrt{2})$.
ومنه القاعدة التالية
قاعدة

لمقارنة عددين حقيقيين a ؛ b ندرس إشارة الفرق $a - b$

• $a - b < 0$ يعني $a < b$

• $a - b > 0$ يعني $a > b$

٤. تمارين محلولة

تمرين 1

س ، ع عدنان حقيقتان
أحسب العدد : $2س + 5ع$
من أجل : $\frac{\quad}{\quad} = 1$
 $3س - 4ع$
(1) $س = 4$ و $ع = 2$
 $\frac{1}{1}$
(2) $س = 1$ و $ع = 3$
 $\frac{2}{3}$
(3) $س = 2$ و $ع = 3$

الحل

(1) من أجل : $س = 4$ و $ع = 2$ يكون :
$$\frac{(2-)(5) + (4-)(2)}{(2-)(4) - (4-)(3)} = 1$$
$$\frac{10 - 8 -}{8 + 12 -} = 1$$
$$\frac{9}{2} + = \frac{18 -}{4 -} = 1$$

(2) من أجل س $\frac{1}{2} =$ ، و $\frac{1}{3} = ع$
يكون :

$$\frac{\frac{5}{3} + 1}{\frac{4}{3} - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{3} \times 5 + \frac{1}{2} \times 2}{\frac{1}{3} \times 4 - \frac{1}{2} \times 3} = 1$$

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{\frac{5+3}{3}}{\frac{8-9}{6}} = 1$$

$$16 = \frac{3 \times 2 \times 8}{3} = \frac{6}{1} \times \frac{8}{3} = 1$$

3) من أجل س $\sqrt[3]{2} =$ و $\sqrt[3]{3} =$ ع يكون :

$$\frac{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}} = 1$$

$$\frac{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})} = 1$$

(بضرب البسط والمقام في مرافق المقام)

$$\frac{60 + \sqrt{6} \sqrt{15} + \sqrt{6} \sqrt{8} + 12}{48 - 18} = 1$$

$$\frac{\sqrt{6} \sqrt{23 + 72}}{30} = \frac{\sqrt{6} \sqrt{23 + 72}}{30 -} = 1$$

تمرين 2

بسط العبارة التالية :

$$\sqrt{20} \sqrt{2} + \frac{\sqrt{125}}{49} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{16}}{20} \sqrt{2} = L$$

الحل

لدينا :

$$\sqrt{20} \sqrt{2} + \frac{\sqrt{125}}{49} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{16}}{20} \sqrt{2} = L$$

$$\sqrt[2]{5 \times 2} \sqrt[2]{2} + \frac{\sqrt[2]{5 \times 5}}{7} \sqrt[2]{2} - \frac{\sqrt[2]{4}}{5 \times 2} \sqrt[2]{2} = L$$

$$\sqrt{5} \sqrt[2]{2} + \frac{\sqrt[2]{5 \times 5}}{7} \sqrt[2]{2} - \frac{\sqrt[2]{4}}{5 \times 2} \sqrt[2]{2} = L$$

ونعلم أن :

$$\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$(0 < a, a = \sqrt[2]{a}) \quad \sqrt{2 \times 2} + \frac{\sqrt{5} \sqrt{5}}{7} - \frac{4}{\sqrt{5} \sqrt{2}} = J$$

$$\sqrt{4} + \frac{\sqrt{5} \sqrt{5}}{7} - \frac{2}{\sqrt{5}} = J$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{5} \frac{5}{7} - \sqrt{5} \frac{2}{5} = J$$

$$(\text{عامل مشترك } \sqrt{5}), \quad \sqrt{5} \left(4 + \frac{5}{7} - \frac{2}{5} \right) = J$$

$$(\text{توحيد المقامات}) \quad \sqrt{5} \frac{140 + 25 - 14}{35} = J$$

$$\sqrt{5} \frac{129}{35} = J$$

تمارين

العمليات في ح

1 أجر العمليات التالية :

1

• $17 + [(7 - 21)3 - 4] \times 11 = \text{أ}$

• $\left(\frac{7}{2} - 1\right)5 + \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{5}{3}\right)\right] \frac{3}{2} = \text{ب}$

• $5 + \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - 3\right) = \text{ج}$

• $\left[\left(\frac{1}{2} - 2\right) \frac{2}{5} + \frac{7}{2} - 11\right] \times \left(\frac{7}{3} - 7\right) = \text{د}$

• $\left[\left(\frac{7}{4} + \frac{2}{3}\right) - 2\right] - \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3}\right) - 3\right] - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) - 2 = \text{هـ}$

2 احسب العبارات التالية :

2

$$\frac{3}{2} - 1$$

$$\frac{\quad}{\quad} + 1$$

$$\frac{1}{4} - 2$$

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{3} + 2$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

$$\frac{\quad}{2} = \text{ب}$$

$$\frac{\quad}{2} = \text{أ}$$

$$\frac{\quad}{3} - 3$$

$$\frac{2}{9} - \frac{1}{4} - 5$$

$$1 + \frac{\quad}{2}$$

3

أحسب العددين التاليين :

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{5} - 3 \quad \frac{25}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - 9 \\
 & \frac{\quad}{5} \times \frac{\quad}{5} = 1 \\
 & 1 - \frac{\quad}{3} \quad \frac{\quad}{12} - \frac{1}{6} + 2 \\
 & \frac{1}{2} - 7 \quad \frac{1}{8} - 2 \\
 & \frac{\quad}{3} \div \frac{\quad}{1} = \text{ب} \\
 & \frac{\quad}{4} - 5 \quad \frac{1}{4} + 3
 \end{aligned}$$

4

بسط العبارات الجبرية التالية إلى أبسط ما يمكن :

$$\begin{aligned}
 & 3 \\
 & \left(\frac{\quad}{2} + ع \right) (4 - س) - (3 + ع) 2 = \text{ا} \\
 & 2 \\
 & 5 = \text{ب} \quad 5 - [(5 - س) 2 - 3] - (2 - 1 س) (س - 5) \\
 & 5 + [3 + \{2 + (1 + (1 - س) 2) 3\} 4] 5 = \text{ج}
 \end{aligned}$$

$$2س + 5ع$$

5

أحسب العدد ل = $\frac{\quad}{س + 3ع}$ في كل من الحالات التالية :

$$(1) \quad س = 1 \quad و \quad ع = 2$$

$$(2) \quad س = 4 \quad و \quad ع = 8$$

$$(3) \quad س = -3 \quad و \quad ع = -6$$

$$(4) \text{ س } = \frac{1}{2} \text{ و ع } = 1 -$$

$$(5) \text{ س } = \frac{2}{3} \text{ و ع } = \frac{4}{3}$$

قوى عدد حقيقي

6 بسط العبارات التالية :

$$\frac{(14 -)^{(4)} \times (15 -)^{(3)}}{70 \times 21} = \text{ج} \quad ; \quad \frac{15 \times 30 \times 40}{5 \times 9 \times 2} = \text{ب} \quad ; \quad \frac{6 \times 25 \times 27}{30 \times 125 \times 10} = \text{ا}$$

$$\frac{\left(\frac{4}{7}\right)^{(2)} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{(3)}}{\left(\frac{14}{8}\right)^{(3)} \times \left(\frac{8}{10}\right)^{(3)}} = \text{د}$$

إرشاد : يمكن البدء بتحليل الأعداد إلى عوامل أولية .

7 بسط كتابة الأعداد التالية :

$$\frac{5 \times 10}{2} \div \frac{\left[2 \times 5 \right]}{25 \times 4} = \text{ب} \quad ; \quad \frac{\left[2 \times 3 \right]}{\left[2 \times 9 \right]} = \text{ا}$$

8 بسط كلا مما يلي (ا ؛ ب عدنان حقيقيان غير معدومين)

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left[\frac{3}{1} \right] ; \frac{3}{2} \left[\frac{2}{1} \right] ; \frac{2}{3} \left[\frac{3}{1} \right] ; \frac{4}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{1} \times \frac{2}{1} ; \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} ; \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} \\ & \sqrt[6]{\frac{4}{1} \times \frac{6}{1}} ; \frac{3}{2} \left[\frac{1}{1} \right] ; \frac{2}{3} \left[\frac{3}{1} \times \frac{2}{1} \right] ; \frac{5}{3} \left[\frac{3}{1} \times \frac{2}{1} \right] ; \left[\frac{1}{5} \right] ; \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{1}}{\frac{4}{1} \times \frac{4}{1}} \end{aligned}$$

9 عين الأعداد الصحيحة م ؛ ن ؛ هـ بحيث :

$$21600 = \overset{م}{5} \times \overset{ن}{3} \times \overset{هـ}{2}$$

$$\frac{15552}{100} = \overset{م}{5} \times \overset{ن}{3} \times \overset{هـ}{2}$$

إرشاد : استعمل التحليل إلى عوامل أولية .

الجداءات المشهيرة

10 احسب الجداءات التالية (ا ؛ ب ؛ س أعداد حقيقية)

$$\frac{2}{3} (2 - 15) ; \frac{2}{3} (-1 + 2) ; \frac{2}{3} (2 + 3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left(\frac{1}{س} + س \right) ; \frac{2}{3} \left(\frac{1}{س} - 2 \right) ; \frac{2}{3} \left(س - \frac{1}{2} \right) \\ & \frac{2}{3} (س - 1) \end{aligned}$$

11

أحسب باستعمال الجداءات الشهيرة ما يلي :

أ ؛ ب ؛ ج ثلاثة أعداد حقيقية ، أنشر ما يلي :

الجنور التربيعية

$$\frac{63}{75}\sqrt{2} - \frac{28}{12}\sqrt{5} + \frac{7}{5}\sqrt{5} = \Rightarrow$$

$$(\sqrt[2]{2}\sqrt{+3}\sqrt{+}) : (\sqrt[2]{7}\sqrt{+5}) : (1-\sqrt[2]{2}\sqrt{+}) : (\sqrt[2]{3}\sqrt{+5}\sqrt{+})$$

16 أنجز الجداءات التالية :

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})(2 + \sqrt{6}) = \text{ا}$$

$$(\sqrt{32} - \sqrt{72} + \sqrt{50})(\sqrt{18} - \sqrt{8}) = \text{ب}$$

$$\sqrt{3-5} \times \sqrt{3+5} = \text{ج}$$

17 لتكن العبارة :

$$1 + \sqrt{s} + \sqrt{s^2} + \sqrt{s^3} = \text{ل}$$

أحسب ل من أجل :

$$\sqrt{3} = \text{س} \quad \bullet$$

$$\sqrt{2} - = \text{س} \quad \bullet$$

$$\sqrt{2} + 1 = \text{س} \quad \bullet$$

$$\sqrt{3} - 5 = \text{س} \quad \bullet$$

18 عين مرافق كل مما يلي ؛ ثم أحسب جداء كل عدد ومرافقه .

$$\sqrt{5} + \sqrt{2} ; (3 - \sqrt{5} -) ; (4 - \sqrt{5} 2) ; (\sqrt{2} 3 + 5 -)$$

19 قارن بين الأعداد التالية :

$$\sqrt{12} 4 \quad \text{و} \quad \sqrt{20} 3 \quad (1)$$

$$\sqrt{5} - 3 \quad \text{و} \quad \sqrt{5} 6 - 14 \quad (2)$$

$$\sqrt{3 2 + 4} \quad \text{و} \quad \sqrt{2} + \sqrt{6} \quad (3)$$

النشطة تمهيدية

نشاط 1 :

لتكن الأعداد : 0 ؛ $4 +$ ؛ $5 -$
 ما هو أكبر عدد ؟ ما هو أصغر عدد ؟
 أتمم الكتابة :

$$0 > \dots \quad ; \quad 0 < \dots \quad ; \quad \dots < \dots$$

- كل من الكتابات السابقة هي متباينة .
 نعلم أن كل عدد سالب أصغر من أي عدد موجب .
 مثلا : $(5 -)$ أصغر من $4 +$ نكتب : $4 + > 5 -$
 العددان $(5 -)$ و $(4 +)$ هما طرفان هذه المتباينة .

نشاط 2 :

لا يمكن التعبير عن مسافة إلا بعدد موجب .
 فمثلا لا نقول إن المسافة بين الجزائر وهران هي : -431 كم .

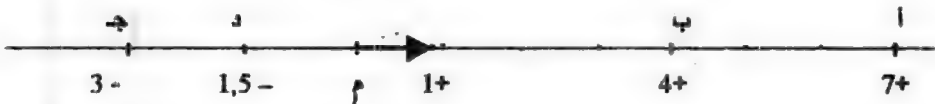


- أ ؛ ب ؛ ج ؛ د نقاط من مستقيم (م ؛ و) معلم له .

3

فواصلها على الترتيب هي : $7 +$ ؛ $4 +$ ؛ $3 -$ ؛ -3

2



- المسافة بين نقطتين هي عدد موجب
 - المسافة بين م و أ هي : $7 - 0 = 7$
 - المسافة بين م و ج هي : $0 - (3 -) = 3 +$

لاحظ أن المسافة بين نقطتين يساوي (أكبر فاصلة - أصغر فاصلة)
● أحسب المسافات التالية :

- المسافة بين أ و ب
- المسافة بين م و د
- المسافة بين م و ج
- المسافة بين د و ج

إذا كانت ن نقطة فاصلتها س ($s < 0$ أو $s > 0$)

فإن المسافة بين م و ن هي العدد الموجب .

($s - 0$) أو ($0 - s$) أي العدد الموجب س أو - س

نعبر عن هذا العدد الموجب بالرمز | س | ونقرأ القيمة المطلقة للعدد س .

2. المتباينات في ح

1) المتباينات في ح تعريف

أ و ب عدنان حقيقيان .
 $a \geq b$ معناه (ب - أ) عدد موجب أو معدوم .

من هذا التعريف تنتج القاعدة العملية التالية :

- لمقارنة عددين حقيقيين ندرس إشارة فرقهما .

مثال : $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ إذن $0 < \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$.

$9 - < (7 -)$ إذن $0 < 2 = (9 -) - (7 -)$.

2) المتباينات والعمليات في ح

- ننكر بما يلي :

- المتباينات والجمع

أ و ب و ج أعداد حقيقية .

بجمع ج إلى المتباينة $a \geq b$ نحصل على متباينة أخرى لها نفس الإتجاه وهي : $a + ج \geq b + ج$.

مثال : لتكن المتباينة : $2 \geq 1$

بإضافة 3 إلى الطرفين نحصل على المتباينة : $5 \geq 3 + 1$

1

- لتكن المتباينة : ب $4 > \frac{1}{2}$ +

بإضافة $(-\frac{1}{2})$ إلى الطرفين نحصل على المتباينة : ب $\frac{7}{2} \geq \frac{1}{2}$

أ \geq ب ، ج \geq د متباينتان لهما نفس الإتجاه .
بالجمع طرفا إلى طرف نحصل على متباينة أخرى لها نفس الإتجاه وهي :
 $ا + ج \geq ب + د$

مثال : لتكن $ا \geq 5$ و $ب \geq 6$
بالجمع طرفا إلى طرف نحصل على : $ا + ب \geq 6 + 5$
أي : $ا + ب \geq 11$

• المتباينات والضرب

أ و ب عدنان حقيقيان .
بضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة $ا \geq ب$ في عدد حقيقي موجب تماما ج
نحصل على متباينة أخرى لها نفس الإتجاه وهي : $ا ج \geq ب ج$.

مثال : . لتكن المتباينة : $ا \geq \frac{1}{4}$
بضرب الطرفين في العدد الموجب 5 نحصل على المتباينة التي لها نفس الإتجاه :
 $\frac{5}{4} \geq ا 5$
لتكن : $2 \leq ا 6$
بقسمة الطرفين على العدد الموجب 2 نحصل على :
 $ا \leq \frac{6}{3}$

أ و ب عدنان حقيقيان .
بضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة $ا \geq ب$ في عدد حقيقي سالب تماما ج
نحصل على متباينة أخرى لها إتجاه معاكس وهي : $ا ج \leq ب ج$.

مثال : لتكن : $\frac{1}{2} \geq 1$

بضرب الطرفين في العدد السالب (-2) نحصل على المتباينة التي لها إتجاه معاكس

(-2) $\frac{1}{2} \leq 1$ (-2) أي : $1 \leq 2$

• المتباينات والتربيع أو الجذر التربيعي

أ ؛ ب عدنان حقيقيان موجبان .

إذا كان : $a < b$ فإن : $a^2 < b^2$

إذا كان : $a < b$ فإن : $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

مثال :

بما أن : $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ فإن : $\frac{1}{9} < \frac{1}{4}$

بما أن : $\frac{2}{25} < \frac{4}{9}$ فإن : $\sqrt{\frac{2}{25}} < \sqrt{\frac{4}{9}}$

أي : $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{3}$

2 . المجالات في ح

تعريف

أ ؛ ب عدنان حقيقيان حيث : $a > b$

المجال المغلق $[a, b]$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة

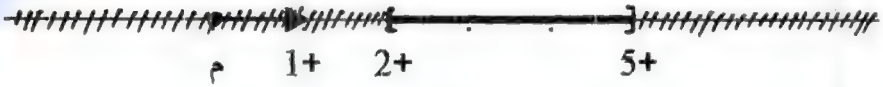
المزدوجة : $a \geq x \geq b$.

مثال :

المجال المغلق $[2 ; 5]$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية s حيث :

$$2 \leq s \leq 5$$

ويمثل بالشكل :



المجال المفتوح $]a ; b[$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة

المزدوجة : $a > s > b$.

تسمى هذه المتباينة المزدوجة حصرا للعدد s

مثال :

المجال المفتوح $]1- ; 3[$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية s حيث :

$$1- > s > 3$$

ويمثل بالشكل :

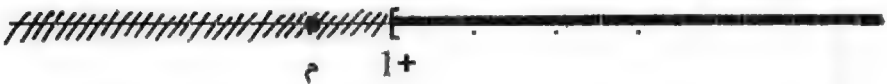


المجال نصف المغلق $]a ; +\infty[$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق

المتباينة : $s \leq a$.

مثال :

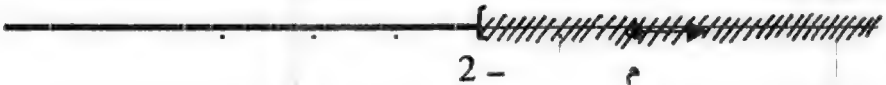
المجال نصف المغلق $]1 ; +\infty[$ ويمثل بالشكل :



المجال نصف المفتوح عند $2-$: $-\infty ; 2-$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي

تحقق المتباينة : $s > 2-$.

ويمثل بالشكل :



ملاحظة : $[\infty + ; \infty -] = \mathbb{R}$

$$[\infty + ; 0] = +\infty$$

$$[0 ; \infty -] = -\infty$$

3. القيمة المطلقة لعدد حقيقي

تعريف

القيمة المطلقة لعدد حقيقي s هي العدد الحقيقي الموجب الذي رمزه $|s|$ والمعروف كما يلي :

$$|s| = +s \text{ إذا كان } s \geq 0$$

$$|s| = -s \text{ إذا كان } s < 0$$

$$|4| = 4 ; |-4| = 4 ; |\pi - 3| = |3 - \pi|$$

من التعريف السابق نستنتج أنه :

• من أجل كل عدد حقيقي s لدينا :

$$|s| \geq 0$$

$$|s| = |-s|$$

$$|s|^2 = |s|^2$$

• من أجل كل عددين حقيقيين s و e لدينا :

$$|s| = |e| \text{ معناه } (s = e) \text{ أو } (s = -e)$$

• القيمة المطلقة والجذر التربيعي

لدينا : $4 = (2+)^2$ و $4 = (2-)^2$

بما أن : $\sqrt{4}$ هو عدد موجب فإن : $|2+| = |2-| = \sqrt{4}$

أي : $2 = \sqrt{4}$

وبصفة عامة :

من أجل كل عدد حقيقي a لدينا : $||a| = \sqrt{a^2}$

• من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا :

$$|a| \times |b| = |a \times b|$$

• من أجل كل عددين حقيقيين a و b ($b \neq 0$) لدينا :

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

أمثلة :

• $|2 - s| = |2 - s|$

$$2 = |s|$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \leq s \text{ إذا كان } s \\ 2 - s \geq 0 \end{array} \right\} =$$

$$\bullet \quad |s| \frac{1}{2} = \frac{|s|}{|2-|s||} = \left| \frac{s}{2-|s|} \right|.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad s \frac{1}{2} \text{ إذا كان } : s \leq 0 \\ \\ s \frac{1}{2} - \text{ إذا كان } : s \geq 0 \end{array} \right\} =$$

• القيمة المطلقة والمجالات :

- ما معنى المتباينة : $|s| \geq 1$ ؟ (1)
 • إذا كان : $s \leq 0$ فإن (1) تعني : $s \geq -1$ (2)
 • إذا كان : $s \geq 0$ فإن (1) تعني : $s \geq 1$ (3)
 أي : $s \leq -1$ (3)

من (1) و (2) نحصل على ما يلي :
 من أجل كل عدد حقيقي s فإن (1) تعني : $-1 \leq s \leq 1$
 أي s ينتمي إلى المجال المغلق $[-1 ; 1]$
 وبصفة عامة :

$$|s| \geq a \text{ معناه : } -a \leq s \leq a \text{ معناه } s \in [-a ; a]$$

4. تطبيقات

1) مقارنة عددين حقيقيين : $\frac{1}{17}$ و $\frac{1}{2\sqrt{12}}$

لنقارن بين العددين الحقيقيين : 17 و $(2\sqrt{12})^2$ لإجراء المقارنة بين هذين العددين تكفي المقارنة بين : 17 و $(2\sqrt{12})^2$

أي : 289 و 288 ومنه : $289 > 288$

$$\frac{1}{2\sqrt{12}} > \frac{1}{17} \quad \text{أي : } 17 > \sqrt{2} \quad \text{وبالتالي}$$

لمقارنة عددين موجبين يكفي مقارنة مربعيهما

2 (كتابة عبارة بدون رمز القيمة المطلقة

س عدد حقيقي

لنكتب العبارة $|3 - س|$ بدون رمز القيمة المطلقة . من أجل ذلك ندرس إشارة : $3 - س$

لدينا : $3 - س \geq 0$ معناه : $3 \leq س$ (باضافة 1 إلى الطرفين)

من $3 \leq س$ نستنتج : $س \leq \frac{1}{3}$ (بقسمة الطرفين على 3)

ومنه إشارة $3 - س$: 1 -

• من أجل $س < \frac{1}{3}$ يكون : $3 - س > 0$

• من أجل $س = \frac{1}{3}$ يكون : $3 - س = 0$

• من أجل $س > \frac{1}{3}$ يكون : $3 - س < 0$

وبالتالي :

• $|3 - س| = 3 - س$ إذا كان : $س < \frac{1}{3}$

• $|3 - س| = س - 3$ إذا كان : $س \geq \frac{1}{3}$

$$\bullet \quad |3 - \text{س}| = 1 \Rightarrow 3 - 1 = 2 \text{ إذا كان : س} > \frac{1}{3}$$

نلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

س	$\infty -$	$3/1 -$	$\infty +$
3 - س	—	0	+
3 - س	3 - 1	0	3 - س

لكتابة عبارة بدون رمز القيمة المطلقة ندرس إشارة المقدار الموجود داخل رمز القيمة المطلقة .

(3) **حصر عدد حقيقي**

أ ، ب عددين حقيقيان حيث :

$$2,3 \geq \text{أ} \geq 2,4 \quad \text{و} \quad 2,1 - \geq \text{ب} \geq 2 -$$

$$\text{أ} + 2 \geq \text{ب} + 1$$

وليكن العدد ج =

$$3 -$$

$$\frac{3}{10} \geq \text{ج} \geq \frac{2}{10}$$

لنبين أن العدد ج يحقق :

لدينا : $2,3 \geq \text{أ} \geq 2,4$ (1)

$2,1 - \geq \text{ب} \geq 2 -$ (2)

بضرب أطراف (2) في العدد 2 نحصل على :

$$2(2,1 -) \geq 2\text{ب} \geq 2(2 -)$$

$4,2 - \geq 2\text{ب} \geq 4 -$ (3)

وبجمع أطراف (1) و (3) نحصل على :

$$2,3 + (4,2 -) \geq \text{أ} + 2\text{ب} \geq 2,4 + (4 -)$$

أي : $1,9 - \geq \text{أ} + 2\text{ب} \geq 1,6 -$ (4)

وبإضافة 1 إلى أطراف (4) نحصل على :

$$1 + 1,9 - \geq 1 + \text{أ} + 2\text{ب} \geq 1 + 1,6 -$$

$$-0,9 \leq 1 + 2b + a \leq -0,6 \dots\dots\dots (5)$$

وبقسمة أطراف (5) على (3-) نحصل على :

$$\frac{-0,9}{3-} \leq \frac{1 + 2b + a}{3-} \leq \frac{-0,6}{3-}$$

$$\text{أي : } 0,2 \leq \frac{1 + 2b + a}{3-} \leq 0,3$$

$$\text{ومنه : } 0,3 \geq \frac{1 + 2b + a}{3-} \geq 0,2$$

$$\text{أي : } \frac{2}{10} \geq \frac{1}{10} \geq \frac{2}{10} \dots\dots\dots (6)$$

المتباينة المزدوجة (6) تعني أننا وجدنا حصرا للعدد جـ

• $\frac{2}{10}$ تسمى القيمة المقربة بالنقصان إلى $\frac{1}{10}$ للعدد جـ

• $\frac{3}{10}$ تسمى القيمة المقربة بالزيادة إلى $\frac{1}{10}$ للعدد جـ

باستعمال المتباينات يمكن إيجاد حصر لعدد

5. تمارين محلولة

تمرين 1

وحدة الطول هي السنتيمتر .
 س و ع هما طول وعرض مائدة مستطيلة حيث :
 $120 > س > 121$ و $75 > ع > 76$
 عين حصرا المحيط هذه المائدة .

الحل

محيط هذه المائدة هو : $2(س + ع)$
 لنبحث عن حصر للعدد : $2(س + ع)$
 لدينا : $120 > س > 125$
 $75 > ع > 76$
 بالجمع طرفا لطرف نجد : $195 > س + ع > 197$
 بضرب الأطراف في 2 نحصل على :
 $195 \times 2 > 2(س + ع) > 197 \times 2$
 أي : $390 > 2(س + ع) > 394$
 محيط هذه المائدة محصور بين : 390 سم و 394 سم

تمرين 2

س عدد حقيقي .
 أكتب العدد : $ك = |س| - |س - 1|$
 بدون رمز القيمة المطلقة .

الحل

لكتابة ك بدون رمز القيمة المطلقة ندرس على التوالي إشارة س وإشارة س - 1



• إشارة - س :
 يكون - س ≥ 0 من أجل : $س \leq 0$
 يكون - س ≤ 0 من أجل : $س \geq 0$

• إشارة س - 1 :



يكون س - 1 $0 \leq 1$ من أجل : س $1 \leq$

يكون س - 1 $0 \geq 1$ من أجل : س $1 \geq$

نلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

س	$\infty -$	0	1	$\infty +$
س -	+	0	-	-
س - 1	-	-	0	+
س - 1	س -	س	س	س
س - 1	س - (1 - س)	س - (1 - س)	س - (1 - س)	س - (1 - س)
ك	س - (1 - س)	س - (1 - س)	س - (1 - س)	س - (1 - س)

من الجدول نستخلص :

• إذا كان : س $0 \geq$ فإن : ك = س - 2 + 1

• إذا كان : س $0 \geq$ س $1 \geq$ فإن : ك = س - (1 - س) = 1

• إذا كان : س $1 \leq$ فإن : ك = س + (1 - س) = 1 - س

س عدد حقيقي .

اكتب العدد : ل = $|(س - 4) \times (س - 3)|$ بدون رمز القيمة المطلقة .

الحل

لكتابة ل بدون رمز القيمة المطلقة ندرس إشارة كل من (س - 4) و (س - 3)

• إشارة س - 4 :



يكون س - 4 $0 \leq 4$ من أجل : س $4 \leq$

يكون س - 4 $0 \geq 4$ من أجل : س $4 \geq$

• إشارة $3 - s$:



يكون $3 - s \leq 0$ من أجل : $s \geq 3$

يكون $3 - s \geq 0$ من أجل : $s \leq 3$

نبين في الجدول الآتي إشارة $(s - 3)(4 - s)$:

$\infty +$	4	3	$\infty -$	s
+	0	—	—	$s - 4$
—	—	0	+	$3 - s$
—	+	—	—	$(s - 3)(4 - s)$
$(s - 3)(4 - s) -$	$(s - 3)(4 - s)$	$(s - 3)(4 - s) -$	ل	

من الجدول نستخلص :

- إذا كان : $s \geq 3$ أو $s \leq 4$ فإن : $-- = (s - 3)(4 - s)$
- إذا كان : $3 \leq s \leq 4$ فإن : $= (s - 3)(4 - s)$

- 1 عبر عن كل من المتباينات التالية بمجال :
 (أ) $3 \leq$ س ؛ (ب) $س \geq 4$ ؛ (ج) $س < \frac{2}{3}$
 (د) $س > 10$ ؛ (هـ) $س \leq 0$ ؛ (و) $س > 0$

- 2 عبر عن كل من المتباينات التالية باتحاد مجالين :
 (أ) $س \geq 2$ أو $س \leq 7$ ؛ (ب) $س > 10$ أو $س < 12$
 (ج) $س > 0$ أو $س < 4$

- 3 عبر عن كل من المتباينات التالية بتقاطع مجالين :
 (أ) $س \leq 3$ و $س \geq 5$ ؛ (ب) $س < 0$ و $س > 2,5$
 (ج) $س > 0$ و $س < 4$

- 4 عبر بمتباينات مزدوجة عن انتماء العدد س إلى المجالات التالية :
 (أ) $س \in [2 ; 10]$ ؛ $س \in [-3 ; 7]$
 (ب) $س \in [3 ; \infty]$ ؛ $س \in [-6 ; +\infty]$
 (ج) $س \in [7 ; +\infty]$ ؛ $س \in [-5 ; +\infty]$
 (د) $س \in [3 ; 18]$ ؛ $س \in [17 ; 20]$

- 5 مثل على محور قيم العدد الحقيقي س التي تحقق ما يلي :
 (أ) $س > 7$ و $س \leq 0$
 (ب) $س < 3$ و $س < 2$
 (ج) $س \geq 5$ و $س < 4$

- 6 عبر بمتباينات عن الجزء غير المشطب فيما يلي :





(د) (جـ) 7 س عدد حقيقي حيث $2 < س$ ، عبر بمتباينات عن كل مما يلي :

$$\frac{1}{س} ؛ 1 - س ؛ \frac{1}{س} ؛ 3 - س$$

8 أعد نفس التمرين (7) إذا كان :
(أ) $س < 4$ (ب) $س > 1$

9 ب عدد حقيقي غير معدوم :
باستعمال الخواص الملائمة للمتباينات . عين س في كل حالة من الحالات التالية :
 $\frac{1}{س} < \frac{1}{4} ؛ 1 > 3 + س ؛ 2 < 1 + س$

10 أ عدد حقيقي حيث : $4 > أ > 6$
(1) أوجد حصرا للعدد : $\frac{1}{أ}$
(2) أوجد حصرا للعدد : $أ + 2$
(3) استنتج حصرا للعدد : $\frac{1}{أ + 2}$

• القبة المظللة

11 أنجز العمليات التالية :
(أ) $| 10 - 7 | + | 10 - 3 - |$ ؛ $| 7 - 4 | + | 3 - 5 |$
(ب) $3,7 - | 1,6 - 0,44 | \times 5$ ؛ $| 2,6 - 3 | \times 2 - | 1 - 0,2 | \times 5$
(ج) $| 2 - \frac{1}{4} | - | \frac{1}{4} - 5 |$ ؛ $\frac{5}{3} + | \frac{5}{3} - 1 |$

$$\left| 1 - \frac{3}{2} \right| - \left| 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| \times 9 ; \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| \times 2 - 3 \quad (د)$$

$$|\sqrt[5]{2-3}| + |\sqrt[5]{-3}| \times 3 ; |\sqrt[3]{2-5}| - |\sqrt[3]{-1}| \quad (هـ)$$

12 احسب كلامن أ ، ب حيث :

$$|4 + س| = أ$$

$$|2 - س| = ب$$

من أجل :

$$\frac{2}{5} = س \quad (1) \quad 2 = س \quad (2) \quad 4 = س \quad (3) \quad 5 = س \quad (4)$$

$$\sqrt[3]{-} = س \quad (5)$$

اكتب بدون رمز القيمة المطلقة

حسب قيم العدد الحقيقي س كلاما يلي :

$$|3 - س| = أ \quad (1) \quad |7 + س| = ب \quad (2) \quad |3 - س| = ج \quad (3)$$

$$|3 - س| + |4 + س| = د \quad (4)$$

إرشاد : استعمل الجداول لتعيين الإشارات .

علما أن : $|ك| \geq \alpha$ يعني : $\alpha \geq ك \geq -\alpha$

أوجد حصرا للعدد س في كل حالة من الحالات التالية :

$$|3 + س| \geq 1 \quad (أ)$$

$$|س + 2| \geq 3 \quad (ب)$$

$$|س - 1| \geq 1 \quad (ج)$$

15 بين أنه إذا كان $|س - 1| > 1$

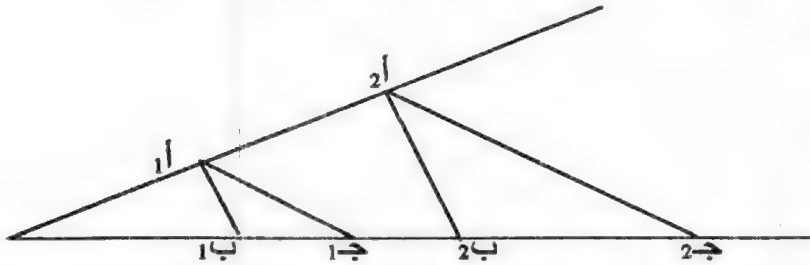
فإن : $س + 1 > 3$

1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1

الجدول التالي يتضمن أطوال أضلاع المثلثين $\Delta 1$ و $\Delta 2$ جـ 1 و $\Delta 2$ جـ 2 (الشكل - وحدة الطول هي السنتيمتر)

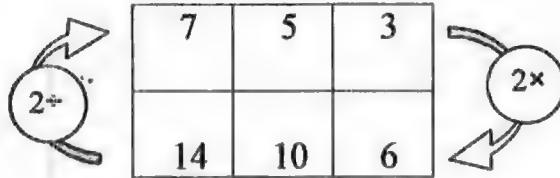
أ ب	ب جـ	جـ أ	
3	5	7	أطوال أضلاع المثلث $\Delta 1$ بـ 1 جـ 1
6	10	14	أطوال أضلاع المثلث $\Delta 2$ بـ 2 جـ 2



تحقق مستعينا بالجدول التالي أنه :

. بضرب كل من : 3 ، 5 ، 7 في 2 نحصل على : 6 ، 10 ، 14

. بقسمة كل من : 6 ، 10 ، 14 على 2 نحصل على : 3 ، 5 ، 7 .



هل يمكن الحصول على كل من 3 ، 5 ، 7 بضرب كل من 6 ، 10 ، 14 في عدد؟
ما هو هذا العدد ؟

. لاحظ أن : الضرب في 2 يكبر أضلاع المثلث $\Delta 1$ بـ 1 جـ 1 مرتين .
القسمة على 2 تصغر أضلاع المثلث $\Delta 2$ بـ 2 جـ 2 مرتين .

نشاط 2

الجدول التالي يبين كميات البنزين التي استهلكتها سيارة في مدة ما ،
والأسعار المقابلة لها .

32,5	25	18,3	14	12,5	الكمية باللتر
650	500	366	280	250	الثمن بالدينار

. احسب ثمن اللتر الواحد من البنزين .

هل تغير هذا الثمن خلال تلك المدة ؟

تحقق أنه :

. بضرب كل من : 12,5 ؛ 14 ؛ 18,3 ؛ 25 ؛ 32,5 في 20

نحصل على : 250 ؛ 280 ؛ 366 ؛ 500 ؛ 650 .

. بقسمة كل من : 250 ؛ 280 ؛ 366 ؛ 500 ؛ 650 على 20

نحصل على : 12,5 ؛ 14 ؛ 18,3 ؛ 25 ؛ 32,5 .

نقول إن : الأعداد : 12,5 ؛ 14 ؛ 18,3 ؛ 25 ؛ 32,5 متناسبة مع الأعداد :

250 ؛ 280 ؛ 366 ؛ 500 ؛ 650 على الترتيب ،

والعدد 20 هو معامل التناسب .

نقول أيضا : الأعداد : 250 ؛ 280 ؛ 366 ؛ 500 ؛ 650 متناسبة مع الأعداد :

1

12,5 ؛ 14 ؛ 18,3 ؛ 25 ؛ 32,5 على الترتيب والعدد — هو معامل التناسب .

20

1. الأعداد المتناسبة

تعريف

نقول عن الأعداد الحقيقية غير المعدومة أ ، ب ، ج ، المعطاة بهذا الترتيب إنها متناسبة مع الأعداد الحقيقية غير المعدومة أ' ، ب' ، ج' المعطاة بهذا الترتيب إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{ج}{ج'}$$

. إذا كان : $\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{ج}{ج'} = \frac{د}{د'}$ (ك عدد حقيقي غير معدوم)

فإن : أ = ك أ' ؛ ب = ك ب' ؛ ج = ك ج' ؛ د = ك د'
العدد ك يسمى معامل تناسب الأعداد : أ ؛ ب ؛ ج ؛ د مع الأعداد : أ' ؛ ب' ؛ ج' ؛ د' .

مثال :

. الأعداد : 1 ؛ 3 ؛ 4,5 متناسبة على الترتيب مع الأعداد : 2,5 ؛ 7,5 ؛ 11,25 لأن :

$$0,4 = \frac{4,5}{11,25} ؛ 0,4 = \frac{3}{7,5} ؛ 0,4 = \frac{1}{2,5}$$

$$أي : 0,4 = \frac{4,5}{11,25} = \frac{3}{7,5} = \frac{1}{2,5}$$

العدد 0,4 هو معامل تناسب الأعداد : 1 ؛ 3 ؛ 4,5 مع الأعداد : 2,5 ؛ 7,5 ؛ 11,25 .

. الأعداد : 2,5 ؛ 7,5 ؛ 11,25 متناسبة على الترتيب مع الأعداد : 1 ؛ 3 ؛ 4,5 لأن :

$$2,5 = \frac{11,25}{4,5} = \frac{7,5}{3} = \frac{2,5}{1} \quad \text{اي}$$

العدد 2,5 هو معامل تتناسب الأعداد : 2,5 ؛ 7,5 ؛ 11,25 مع الأعداد : 1 ؛ 3 ؛ 4,5 .

فلا تخف

معامل التناسب الأول هو مقلوب معامل التناسب الثاني

$$\frac{5}{2} = \frac{25}{10} = 2,5 \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4 : \text{لان}$$

خواص الأعداد المتناسبة

خاصية ١

الجدول التالي يتضمن تناسبا لعدد من الأقلام وأثمانها

عدد الأرقام

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	عدد الأرقام
85	76,5	68	59,5	51	42,5	34	25,5	17	8,5	الثنى د ج

10 ×

4 ×

4 ×

10 ×

هذا الجول يبين أنه لكي نحصل على ثمن عشرة أقلام يكفي أن نضرب ثمن القلم الواحد في 10 .

ولكي نحصل على ثمن ثمانية أقلام يكفي أن نضرب ثمن قلمين في 4 :
أي :

$$\frac{8}{68} = \frac{4 \times 2}{4 \times 17} = \frac{2}{17} \quad \text{و} \quad \frac{10}{85} = \frac{10 \times 1}{10 \times 8,5} = \frac{1}{8,5}$$

هذا يعني أنه إذا ضربنا حذّي نسبة بعدد فإن معامل التناسب لا يتغير .
وبصفة عامة لدينا الخاصية التالية :

خاصية ١

$$\begin{aligned} \text{إذا كان : } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{ك} \\ \text{فان : } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{ك} \end{aligned}$$

مثال :

لتكن الأعداد : 1 ؛ 4 ؛ 6 المتناسبة على الترتيب مع الأعداد : 3 ؛ 12 ؛ 18

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{6}{18} \quad \text{أي :}$$

ويضرب حذّي نسبة ما في عدد نحصل على التناسب التالي :

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{6}{18} = \frac{1 \times 6}{3 \times 6} = \frac{4 \times 3}{12 \times 3} = \frac{6 \times 2}{18 \times 2}$$

فالأعداد : 1 ؛ 4 ؛ 6 ؛ 2 ؛ 12 ؛ 30 متناسبة على الترتيب مع الأعداد :
3 ؛ 12 ؛ 18 ؛ 6 ؛ 36 ؛ 90

خاصية 2

الجدول التالي يتضمن تناسب عدد من الكتب مع أثمانها

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	عدد الكتب
750	675	600	525	450	375	300	225	150	75	التمن د ج

لاحظ في الجدول أنه للحصول على ثمن 9 كتب يكفي جمع ثمن 4 كتب وثمان

$$\frac{9}{675} = \frac{5+4}{375+300} = \frac{5}{375} = \frac{4}{300} : \text{كتب 5}$$

هذا يعني أنه إذا جمعنا بسطي نسبتيين وجمعنا مقاميهما فإن معامل التناسب لا يتغير . وبصفة عامة لدينا الخاصية التالية :

خاصية 2

$$\text{إذا كان : } \frac{ا}{ا'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{ج}{ج'} = ك$$

$$\text{فان : } \frac{ا}{ا'+ب'+ج'} = \frac{ب}{ب'+ج'} = \frac{ج}{ج'} = ك$$

مثال :

لتكن الأعداد : 3 ؛ 6 ؛ 15 المتناسبة على الترتيب مع الأعداد :

4 ؛ 8 ؛ 20

$$\frac{15}{20} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} : \text{أي}$$

بجمع بسوط ومقامات بعض النسب نحصل على ما يلي :

$$\frac{15 + 6 + 3}{20 + 8 + 4} = \frac{15 + 6}{20 + 8} = \frac{15 + 3}{20 + 4} = \frac{6 + 3}{8 + 4} = \frac{15}{20} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

فالأعداد : 3 ؛ 6 ؛ 15 ؛ 9 ؛ 18 ؛ 21 ؛ 24 متناسبة على الترتيب مع الأعداد : 4 ؛ 8 ؛ 20 ؛ 12 ؛ 24 ؛ 28 ؛ 32 .

2 . التناسب

تحقق أن العددين : 3 ؛ 6 متناسبين على الترتيب مع العددين 7,5 ؛ 15

يكون : $\frac{6}{15} = \frac{3}{7,5}$ تساوي النسبتين : $\frac{6}{15}$ و $\frac{3}{7,5}$ يسمى تناسبا ومنه :

تعريف

أ ؛ ب ؛ ج ؛ د أربعة أعداد غير معدومة معطاة بهذا الترتيب .

تسمى المساواة : $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ تناسبا .

أ هو الحد الأول ؛ ب الحد الثاني

ج الحد الثالث ؛ د الحد الرابع

الحدان الأول والرابع يسميان الطرفين

والحدان الثاني والثالث يسميان الوسيطين .

إذا كان ب = ج فإن ب يسمى الوسط المتناسب ونكتب :

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{د}$$

مثال :

الأعداد : 1,5 ؛ 6 ؛ 2 ؛ 8 بهذا الترتيب تشكل التناسب التالي :

$$\frac{2}{8} = \frac{1,5}{6}$$

بينما الأعداد : 1,5 ؛ 8 ؛ 6 ؛ 2 بهذا الترتيب لا تشكل تناسباً

$$\frac{6}{2} \neq \frac{1,5}{8} \quad \text{لأن :}$$

خواص التناسب

ليكن التناسب : $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ و ك معامل التناسب

$$\text{لدينا : } \frac{ا}{ب} = ك \quad ؛ \quad \frac{ج}{د} = ك$$

$$\text{أي : } ا = ب \times ك \quad ؛ \quad ج = د \times ك$$

$$\text{ومنه : } \frac{ا}{ج} = \frac{ب \times ك}{د \times ك} = \frac{ب}{د} \quad \text{أي : } \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$$

لاحظ أنه من التناسب $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ يمكن الحصول على تناسب آخر بتبديل موضعي

$$\frac{ا}{ج} = \frac{ب}{د} \quad \text{الوسطين هو}$$

خاصية 1

بتبديل موضعي وسطي تناسب نحصل على تناسب آخر

مثال

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{ليكن التناسب}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{بتبديل موضعي الوسطين 1 ؛ 6 نحصل على تناسب آخر هو :}$$

ليكن التناسب : $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ و ك معامل التناسب

لدينا : $أ = ب \times ك$ و $ج = د \times ك$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب \times ك}{ب} \quad \text{و} \quad \frac{ج}{د} = \frac{د \times ك}{د}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب \times ك}{ب} \quad \text{و} \quad \frac{ج}{د} = \frac{د \times ك}{د}$$

لاحظ أنه يمكن الحصول على التناسب $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

بتبديل موضعي الطرفين في التناسب $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

خاصية 2

بتبديل موضعي طرفي تناسب نحصل على تناسب آخر

مثال

$$\frac{10}{14} = \frac{5}{7} \quad \text{ليكن التناسب}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{14}{7} \quad \text{بتبديل موضعي الطرفين 5 ؛ 14 نحصل على تناسب آخر هو :}$$

ليكن التناسب : $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ (1)

لدينا : $\frac{ا \times د}{ب \times د} = \frac{ج \times د}{د \times د}$ و $\frac{ج \times ا}{د \times ب} = \frac{ج \times ا}{د \times ب}$

إنن : $\frac{ا \times د}{ب \times د} = \frac{ج \times د}{د \times د}$ ومنه :

(2) $ا \times د = ج \times ب$

لاحظ في المساواة (2) أن $ا \times د$ هو جداء طرفي التناسب (1) وأن : $ج \times ب$ هو جداء وسطي هذا التناسب .
ومنه الخاصية التالية :

الخاصية 3

في كل تناسب جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين أي :

$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ معناه : $ا \times د = ج \times ب$.

مثال :

الأعداد الأربعة : 3 ؛ 4 ؛ 15 ؛ 20 بهذا الترتيب تشكل تناسبا

$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ لأن : $15 \times 4 = 20 \times 3$

الأعداد الأربعة : 3 ؛ 2 ؛ 15 ؛ 20 بهذا الترتيب لا تشكل تناسبا
لأن : $15 \times 2 \neq 20 \times 3$

3. تطبيقات

1 - التمثيل البياني لأعداد متتالية

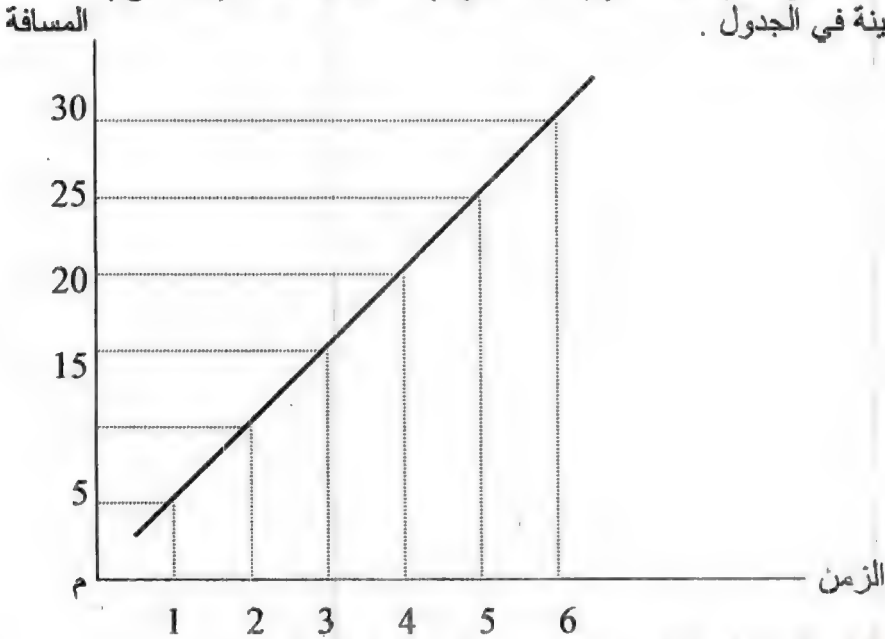
الجدول التالي يمثل المسافات التي يقطعها راجل خلال أزمنة متناسبة معها .

عدد الساعات	1	2	3	4	5	6
عدد الكيلومترات	5	10	15	20	25	30

لاحظ أن : $\frac{6}{30} = \frac{5}{25} = \frac{4}{20} = \frac{3}{15} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

← ←

لتمثل في معلم متعامد (م ؛ و ؛ ي) صور الثنائيات (س ؛ ع) المبينة في الجدول .



لاحظ أن النقاط الممثلة هي نقاط من مستقيم يشمل المبدأ .

العلاقة

الأعداد المتناسبة تمثل بنقاط من مستقيم يشمل المبدأ

2. حساب حد من حدود تناسب

لنعين العدد س الذي يحقق التناسب :

$$\frac{36}{24} = \frac{0,5}{س} \quad (1)$$

من (1) نستنتج : $36 \times 0,5 = 24 \times س$ (جداء الطرفين يساوي جداء الوسيطين)

$$18 = 24 \times س \quad (2)$$

فالعدد س هو حل المعادلة (2)

$$\frac{3}{4} = س \quad \text{وبالتالي : } \frac{18}{24} = س$$

. تعيين حد مجهول من حدود تناسب يؤول إلى حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .

3. تعيين وسط متناسب

$$\frac{9}{16} = \frac{س}{س} \quad \text{لنعين العدد س الذي يحقق التناسب :} \quad (1)$$

من (1) نستنتج : $16 \times 9 = س \times س$

$$16 \times 9 = س^2 \quad \text{اي :} \quad (2)$$

الجداء 16×9 موجب فالعدد س هو الجذر التربيعي للجداء 16×9

$$\sqrt{16 \times 9} = س \quad \text{اي :}$$

$$\sqrt{4^2 \times 3^2} =$$

$$4 \times 3 = س$$

$$12 = س$$

. الوسط المتناسب هو الجذر التربيعي لجداء الطرفين .

4. تمارين محلولة

تمرين 1

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} \quad \text{ليكن التناسب}$$

(1) بين أن الأعداد أ ؛ ب ؛ (6 + 5 ب) متناسبة مع الأعداد : ج ؛ د ؛ (6 + 5 د) . س 6

(2) س و ع عدنان حقيقيان يحققان : $\frac{س}{6} = \frac{ع}{5}$ و $5 + س = 6 + ع = 2$
أحسب العددين س ، ع باستعمال نتيجة السؤال الأول .

الحل

(1) لدينا : $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$
ب ا ب ا

(2) بتبديل موضعي وسطي (1) نحصل على التناسب $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$
ب ا ب ا
بضرب حدي في العدد 6 وحدي في العدد 5 نحصل على :

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} \Rightarrow \frac{ا \cdot 6}{ب \cdot 6} = \frac{ج \cdot 5}{د \cdot 5}$$

$$\frac{ا \cdot 6}{ب \cdot 6} = \frac{ج \cdot 5}{د \cdot 5} \Rightarrow \frac{ا \cdot 6}{ب \cdot 6} = \frac{ج \cdot 5}{د \cdot 5} \Rightarrow \frac{ا \cdot 6}{ب \cdot 6} = \frac{ج \cdot 5}{د \cdot 5}$$

$$\frac{ا \cdot 6}{ب \cdot 6} = \frac{ج \cdot 5}{د \cdot 5} \Rightarrow \frac{ا \cdot 6}{ب \cdot 6} = \frac{ج \cdot 5}{د \cdot 5} \Rightarrow \frac{ا \cdot 6}{ب \cdot 6} = \frac{ج \cdot 5}{د \cdot 5}$$

فالأعداد : أ ؛ ب ؛ (6 + 5 ب) متناسبة مع الأعداد : ج ؛ د ؛ (6 + 5 د)

قطعة أرض مثلثة محيطها 108 م .
 أطوال أضلاعها متناسبة مع الأعداد : 4 ؛ 5 ؛ 6 .
 عين هذه الأطوال .

الحل

ليكن س ؛ ع ؛ ص أطوال الأضلاع بالأمطار فيكون :

$$108 = \text{ص} + \text{ع} + \text{س}$$

الأعداد : س ؛ ع ؛ ص متناسبة على الترتيب مع الأعداد : 4 ؛ 5 ؛ 6 معناه :

$$\frac{\text{ص}}{6} = \frac{\text{ع}}{5} = \frac{\text{س}}{4} \quad (1) \dots\dots\dots$$

باستعمال الخاصية 2 نستنتج من (1) :

$$(2) \dots\dots\dots \frac{36}{5} = \frac{108}{15} = \frac{\text{ص} + \text{ع} + \text{س}}{6 + 5 + 4} = \frac{\text{ص}}{6} = \frac{\text{ع}}{5} = \frac{\text{س}}{4}$$

من (2) نحصل على التناسبات التالية :

$$\frac{36}{5} = \frac{\text{ص}}{6} \quad \text{و} \quad \frac{36}{5} = \frac{\text{ع}}{5} \quad \text{و} \quad \frac{36}{5} = \frac{\text{س}}{4}$$

$$\frac{6 \times 36}{5} = \text{ص} ; \quad \frac{5 \times 36}{5} = \text{ع} ; \quad \frac{4 \times 36}{5} = \text{س} ; \quad \text{إذن :}$$

$$\text{أي : س} = 28,8 ; \quad \text{ع} = 36 ; \quad \text{ص} = 43,2$$

فأطوال الأضلاع هي : 28,8 م ؛ 36 م ؛ 43,2 م

تمارين

النسبة

1. اكتب النسب التالية على شكل كسر :

$\frac{2}{5} - 8$	$\frac{3}{4} - \frac{6}{7}$	$\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
$0,3$	$0,7$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{7} + 5$	$\frac{7}{12} + \frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$

2. أ و ب عدنان حقيقيان .

أكتب النسبة — على شكل كسر عشري في كل من الحالات التالية :

$\frac{5}{8} = \text{ب}$	$8,75 = \text{أ}$	$\frac{5}{5} = \text{ب}$	$15 = \text{أ}$
$\frac{8}{7} + \text{ب} =$	$\frac{4}{5} = \text{أ}$	$\frac{5}{12} = \text{ب}$	$4 = \text{أ}$
$\frac{8}{9} + \text{ب} =$	$9,6 = \text{أ}$	$3 = \text{ب}$	$12 = \text{أ}$
$\frac{3}{4} = \text{ب}$	$\frac{9}{8} + \text{أ} =$	$\frac{4}{3} = \text{ب}$	$12 = \text{أ}$

• الأعداد المتناسبة

3. احسب معامل تناسب الأعداد : 10 ؛ 30 ؛ 450 مع الأعداد : 25 ؛ 75 ؛ 1125 على الترتيب .

4 احسب معامل تناسب الأعداد : 25 ؛ -75 ؛ -1125 مع الأعداد :
-10 ؛ 30 ؛ 450 على الترتيب .

5 احسب معامل تناسب الأعداد : 12 ؛ 24 ؛ 36 ؛ 48 ؛ 60 مع الأعداد :
117,6 ؛ 235,2 ؛ 352,8 ؛ 470,4 ؛ 588 على الترتيب .

6 بين أن الأعداد : $\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{1}{4}$ ؛ $\frac{2}{5}$ متناسبة مع الأعداد :
 $\frac{3}{2}$ ؛ $\frac{3}{4}$ ؛ $\frac{6}{5}$ على الترتيب .

7 أتم جدول التناسب في كل من الحالتين :
(أ)

12	4	2
...	14	9	6,4	...

(ب)

...	...	50	25
375	187,5	75	...

8 هل يمثل الجدول الآتي أعدادا متناسبة ؟ :

12	8	6	4	3	2	عدد العلب من الياورت
144	96	66	48	33	22	الثمن بالدينار

9 نفس السؤال السابق بالنسبة إلى أعداد الجدول التالي :

112	108	104	100	96	92	88
56	54	52	50	48	46	44

10

ق1 ؛ ق2 ؛ ق3 ؛ ق4 أربعة أقراص أنصاف أقطارها بالمليمتر هي على الترتيب : 15 ؛ 30 ؛ 60 ؛ 150 .

1 (أحسب بالمليمتر المربع : م1 ؛ م2 ؛ م3 ؛ م4 مساحات هذه الأقراص .

2 (هل هذه المساحات متناسبة مع أنصاف الأقطار ؟ .

11

1 (لتحضير مربى مشمش نستعمل 0,75 كغ سكر لكل 1 كغ من المشمش . أتمم الجدول التالي :

وزن المشمش بالكيلو غرام	8	15	20
وزن السكر بالكيلو غرام

2 (ما هو وزن المشمش بالكيلو غرام الذي تتطلب استعمال 10 كغ سكر ؟ .

12

س ؛ ع ؛ ص ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة مع الأعداد : 2 ؛ 3 ؛ 5 .

أحسب كلا من س ؛ ع ؛ ص علماً بأن : 4 س - ع + 2 ص = 693

(الجواب : س = 66 ؛ ع = 99 ؛ ص = 165)

13

س ؛ ع ؛ ص ثلاثة أعداد حقيقية موجبة متناسبة مع الأعداد الحقيقية الموجبة : أ ؛ ب ؛ ج بين أن :

$$\frac{\sqrt[2]{\text{ص} + \text{ع} + \text{س}}}{\sqrt[2]{\text{ج} + \text{ب} + \text{أ}}} = \frac{\text{ص}}{\text{ج}} = \frac{\text{ع}}{\text{ب}} = \frac{\text{س}}{\text{أ}}$$

14

مثل في معلم متعامد متجانس للمستوي النقاط التالية :

$$\left(\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2} \right) , \left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{2} \right) , \left(\frac{3}{4} ; -\frac{1}{2} \right)$$

بين أن هذه النقاط من مستقيم واحد يشمل المبدأ .

15 رتب الأعداد الأربع بحيث تشكل تناسبا في كل من الحالات التالية :

أ (14 ؛ 21 ؛ 49 ؛ 35)

ب (7,8 ؛ 117 ؛ 3,25 ؛ 15)

ج ($\sqrt{15}$ ؛ $\sqrt{9}$ ؛ $\sqrt{3}$ ؛ $\sqrt{5}$)

د ($\sqrt{54}$ ؛ 12 ؛ $\sqrt{3}$ ؛ $\sqrt{8}$)

16 في كل من الحالات الآتية الأعداد الأربعة المعطاة بهذا الترتيب تشكل تناسبا .

أ (16 ؛ 8 ؛ 8 ؛ س)

ب (س ؛ 64 ؛ 0,75 ؛ 2)

ج (105 ؛ س ؛ 70 ؛ 45)

د ($\frac{4}{7}$ ؛ $\frac{2}{5}$ ؛ 2 ؛ س)

عين العدد س في كل حالة .

17 عين الحد المجهول في كل من التناسبات التالية :

أ ($\frac{3-}{س} = \frac{9-}{س}$ ؛ ب ($\frac{7-}{15} = \frac{6-}{س}$) ج ($\frac{9-}{16} = \frac{س}{12}$) د ($\frac{7-}{15} = \frac{6-}{س}$)

د ($\frac{8}{5} = \frac{س}{3}$ ؛ هـ ($\frac{9-}{3} = \frac{س}{4}$)

18 احسب في كل حالة ، الرابع المتناسب للأعداد التالية :

أ (6 ؛ 9 ؛ 8 ؛ ب) $\frac{8}{15} - \frac{4}{5} - \frac{2}{3}$

ج ($\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{6}$ ؛ $\sqrt{3}$)

19 أحسب في كل حالة ، الوسط المتناسب للأعداد التالية :

أ) 3 و 27 ؛ ب) 4 و 36 ؛ ج) $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{12}$ ؛ د) $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{8}$

20 س ؛ ع عدنان حقيقيان ($0 \neq$)
عين س ؛ ع في كل من الحالات التالية :

أ) $4,2 = س + ع$ و $5 = \frac{س}{ع}$
ب) $40 = س + ع$ و $\frac{2}{3} = \frac{س}{ع}$
ج) $55 = س + ع$ و $\frac{9}{4} = \frac{س}{ع}$
د) $10 = س - ع$ و $5 = \frac{س}{ع}$
هـ) $20 = س - ع$ و $\frac{4}{9} = \frac{س}{ع}$
و) $32 = س - ع$ و $\frac{3}{5} = \frac{س}{ع}$

21 س و ع عدنان حقيقيان ($0 \neq$) حيث :
 $168 \times ع = 315 \times س$

1) أحسب النسبة $\frac{س}{ع}$ ثم أكتبها على أبسط شكل ممكن .

2) أحسب س و ع في كل من الحالات التالية :

أ) $س + ع = 253$ ؛ ب) $ع - س = 126$ ؛ ج) $س \times ع = 1080$

3

22) نصف قطر القمر هو — نصف قطر الأرض .

11

نصف قطر الشمس هو 108 مرات نصف قطر الأرض .
ما هي نسبة نصف قطر القمر إلى نصف قطر الشمس ؟ .

23) قسّم العدد 3912 إلى أعداد : س ؛ ع ؛ ص ؛ ل متناسبة مع الأعداد :

$$\frac{1}{6} ؛ \frac{2}{7} ؛ \frac{3}{5} ؛ \frac{1}{2}$$

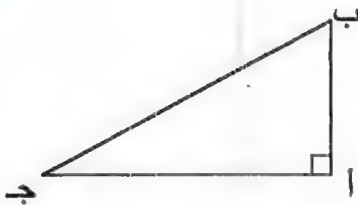
24) تقاسم ثلاثة أشخاص مبلغاً من المال بحصص متناسبة مع الأعداد :

2 ؛ 3 ؛ 5 .

إذا كانت حصة الثالث تزيد عن حصة الثاني بمبلغ 2400 دج .
فما هو المبلغ المقتسم ؟ .

1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1



أ ب ج مثلث قائم في أ .

• أذكر عناصر هذا المثلث

- أضلاعه

- زواياه

- رؤوسه

• إذا كانت وحدة قياس الزوايا هي الدرجة فما هو مجموع أقياس زوايا المثلث :

$$\hat{أ} + \hat{ب} + \hat{ج}$$

- احسب المجموع : $\hat{ب} + \hat{ج}$

- استنتج أن كلا من الزاويتين $\hat{ب}$ و $\hat{ج}$ هي زاوية حادة .

• الضلع [ب ج] المقابل للزاوية القائمة أ هو وتر المثلث القائم أ ب ج .

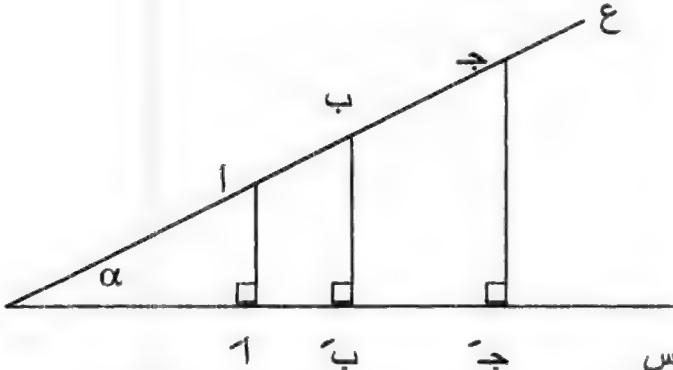
• كل من [أ ب] ؛ [أ ج] هو ضلع للزاوية القائمة وهو مقابل لزاوية حادة ومجاور للأخرى أي :

[أ ب] يقابل $\hat{ج}$ ويجاور $\hat{ب}$

[أ ج] يقابل $\hat{ب}$ ويجاور $\hat{ج}$

نشاط 2 : جيب تمام زاوية حادة

[م س ، م ع] زاوية حادة قياسها α .



أ؛ ب؛ ج. نقاط من [م ع . مساقطها العمودية على [م س هي :
 أ'؛ ب'؛ ج' على الترتيب .

• (أ أ') // (ب ب') // (ج ج') . لماذا ؟

• تحقق باستعمال نظرية طالس أن :

$$\frac{1^{\circ} \text{ م}}{1^{\circ} \text{ أ}} = \frac{1^{\circ} \text{ م}}{1^{\circ} \text{ ج}} \quad \text{و} \quad \frac{1^{\circ} \text{ م}}{1^{\circ} \text{ ب}} = \frac{1^{\circ} \text{ م}}{1^{\circ} \text{ ج}}$$

استنتج أن : (1)

لاحظ في (1) أن كل نسبة هي على الشكل :

طول المسقط العمودي لقطعة من [م ع على [م س

طول نفس القطعة

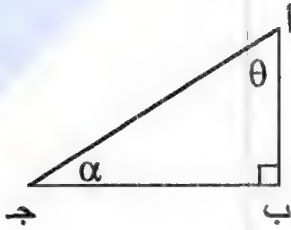
العلاقة (1) تعني أن نسبة طول المسقط العمودي لقطعة من [م ع على [م س إلى طول نفس القطعة هي نسبة ثابتة .

هذه النسبة مستقلة عن القطعة المختارة على [م ع ، ولكنها مرتبطة بالقيس α للزاوية الحادة [م س ، م ع] هذه النسبة الثابتة تسمى جيب تمام العدد α ، أو يقال تجاوزا جيب تمام الزاوية [م س ، م ع] التي قيسها α .
 ونرمز إليها بالرمز $\text{تجب } \alpha$

$$\frac{1^{\circ} \text{ م}}{1^{\circ} \text{ أ}} = \frac{1^{\circ} \text{ م}}{1^{\circ} \text{ ب}} = \frac{1^{\circ} \text{ م}}{1^{\circ} \text{ ج}} = \text{تجب } \alpha$$

2. النسب المثلثية لزاوية حادة

1) جيب تمام وجيب زاوية حادة



أ ب ج مثلث قائم في ب ،
 θ ، α هما قيسا الزاويتين الحادتين \hat{A} و \hat{C}
 لاحظ أن [ج ب] هو المسقط العمودي للوتر
 [ج أ] على [ب ج] (حسب النشاط 2 لدينا :
 ج ب طول الضلع المجاور للزاوية جـ

$$\text{تجب } \alpha = \frac{\text{ج ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{طول الوتر}}$$

لاحظ أيضا أن [أ ب] هو المسقط العمودي للوتر [أ ج] على [ب ج] فيكون :
 أ ب طول الضلع المجاور للزاوية أـ

$$\text{تجب } \theta = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{طول الوتر}}$$

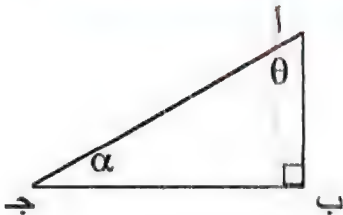
بصفة عامة :

جيب تمام زاوية حادة قيسها α من مثلث قائم هو :

$$\text{تجب } \alpha = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$$

. جيب الزاوية الحادة تعريف

جيب زاوية حادة قيسها α هو جيب تمام الزاوية المتممة لها .



نرمز إلى جيب الزاوية α بالرمز جيب α

أ ب ج مثلث قائم في ب ،
 θ ، α هما قيسا الزاويتين الحادتين جـ و أـ

حسب هذا التعريف لدينا :

جيب الزاوية α هو جيب تمام الزاوية θ المتممة لها ،

أي : $\text{جيب } \alpha = \text{تجب } \theta$

أ ب

(تعريف تجب θ) $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} =$

أ ج

أ ب

طول الضلع المقابل للزاوية جـ

إذن : $\text{جيب } \alpha = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} =$

طول الوتر

أ ج

بصفة عامة :

جيب زاوية حادة قياسها α من مثلث قائم هو :

طول الضلع المقابل

$\text{جيب } \alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$

طول الوتر

ملاحظة :

إذا كان α هو قياس زاوية حادة في مثلث قائم فإن : $\text{تجب } \alpha > 1$ و $\text{جيب } \alpha < 1$
لأن طول الوتر هو مقام هاتين النسبتين والوتر أطول ضلع في المثلث القائم .

مثال :

أ ب ج مثلث قائم في ب ، أطوال أضلاعه هي : 3 ، 4 ، 5 .

أ ب

ج ب

لدينا : $\text{تجب } \alpha = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج أ}} =$ و $\text{جيب } \alpha = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} =$

أ ج

ج أ

3

4

$\text{تجب } \alpha = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} =$ و $\text{جيب } \alpha = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج أ}} =$

5

5

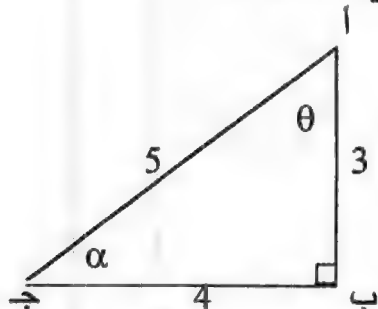
ج ب

أ ب

$\text{تجب } \theta = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} =$ و $\text{جيب } \theta = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج أ}} =$

ج أ

أ ج



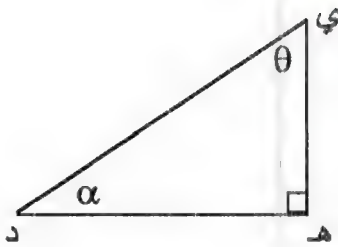
$$\frac{4}{5} = \theta \text{ جيب} \quad \text{و} \quad \frac{3}{5} = \theta \text{ ظل}$$

2 (ظل وظل تمام زاوية حادة
ظل زاوية حادة
تعريف

ظل زاوية حادة قياسها α هو نسبة جيب α إلى جيب α

نرمز إلى ظل الزاوية α بالرمز ظل α ونكتب :

$$\frac{\text{جيب } \alpha}{\text{ظل } \alpha} = \alpha \text{ جيب}$$



د هـ ي مثلث قائم في هـ .
 α ؛ θ هما قياسا الزاويتين د ؛ ي .

حسب التعريف لدينا :

$$\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \alpha}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \alpha} = \frac{\text{ي هـ}}{\text{د هـ}} = \frac{\frac{\text{ي هـ}}{\text{د ي}}}{\frac{\text{د هـ}}{\text{د ي}}} = \frac{\text{جيب } \alpha}{\text{ظل } \alpha} = \alpha \text{ جيب}$$

بصفة عامة :

ظل زاوية حادة قياسها α من مثلث قائم هو :

$$\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \alpha}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \alpha} = \text{ظل } \alpha$$

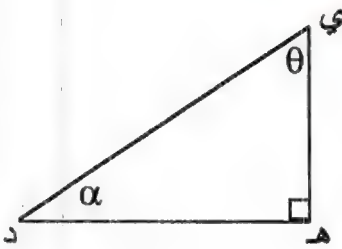
ظل تمام زاوية حادة
تعريف

ظل تمام زاوية حادة قياسها α هو مقلوب ظل α

نرمز إلى ظل تمام الزاوية α بالرمز تظل α ونكتب :

$$\frac{1}{\text{ظل } \alpha} = \text{تظل } \alpha$$

ليكن المثلث د هـ ي القائم في هـ .
 α ؛ θ هما قياسا الزاويتين د ؛ ي .



حسب التعريف لدينا :

$$\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \alpha}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \alpha} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ي هـ}} = \frac{1}{\frac{\text{ي هـ}}{\text{د هـ}}} = \frac{1}{\text{ظل } \alpha} = \text{تظل } \alpha$$

بصفة عامة :

ظل تمام زاوية حادة قياسها α من مثلث قائم هو :

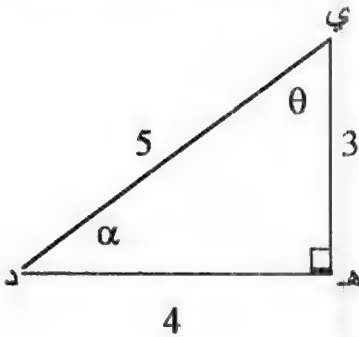
$$\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \alpha}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \alpha} = \text{تظل } \alpha$$

ملاحظة :

بما أن ظل α و تظل α معرفان بنسبة ضلعي الزاوية القائمة فيمكن أن يكون كل من ظل α و تظل α أكبر من 1 .

مثال :

د ه ي مثلث قائم في هـ ، أطوال أضلاعه (بالسنتيمتر) هي : 3 ؛ 4 ؛ 5 .

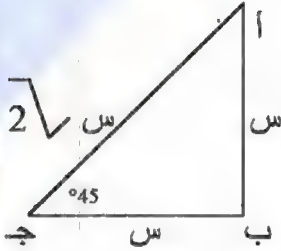


$$\begin{array}{lcl} \text{ظل } \alpha = \frac{\text{د ه}}{\text{ه ي}} = \frac{3}{4} & \text{و تظل } \alpha = \frac{\text{ه د}}{\text{د ه}} = \frac{4}{3} & \\ \text{ظل } \theta = \frac{\text{ه د}}{\text{د ه}} = \frac{4}{3} & \text{و تظل } \theta = \frac{\text{د ه}}{\text{ه د}} = \frac{3}{4} & \end{array}$$

النسب : جب α ؛ تجب α ؛ ظل α ؛ تظل α المتعلقة بالزاوية الحادة α تسمى النسب المثلثية للزاوية α .

3. تطبيقات

1) قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة
الزاوية 45°



أ ب ج مثلث قائم ومتساوي الساقين .
فقيس كل زاوية حادة منه 45° .

إذا كان : أ ب = ب ج = س فإن :

$$\text{أ ج} = \text{ب}^2 + \text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{ب}^2 = 2\text{ب}^2$$

$$\text{س} = \text{س} + \text{س} = 2\text{س}$$

ومنه : أ ج = س $\sqrt{2}$

لنحسب الآن النسب المثلثية التالية :

$$\bullet \text{ ج ب } 45^\circ = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \text{ ت ج ب } 45^\circ = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج أ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \text{ ظل } 45^\circ = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\bullet \text{ تظل } 45^\circ = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{ج ب } 45^\circ = \text{ت ج ب } 45^\circ$$

$$\text{ظل } 45^\circ = \text{تظل } 45^\circ = 1$$

• الزاويتان 30° و 60°

أ ب ج مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه س ،

أي : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$
(أ هـ) منصف الزاوية أ .

إذن : $\hat{HAB} = 30^\circ$

(أ هـ) هو محور للضلع [ب ج]

أي : $\hat{AHB} = 90^\circ$ و $\frac{1}{2} \text{ س} = \text{هـ ب}$

المثلث أ هـ ب قائم في هـ و $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{BAH} = 30^\circ$

تحقق بتطبيق نظرية فيثاغورث أن : $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ س} = \text{أ هـ}$

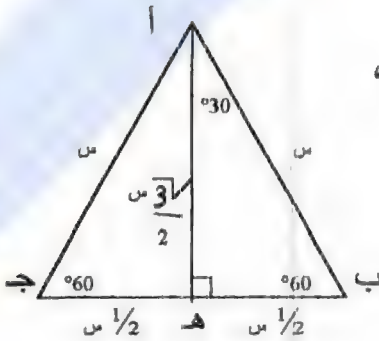
لنحسب الآن النسب المثلثية للزاوية 30° :

• $\frac{1}{2} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{س}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{أ ب}} = \sin 30^\circ$

• $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \cos 30^\circ$

• $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{أ هـ}} = \tan 30^\circ$

• $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \cot 30^\circ$



$\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{ظل } 30^\circ$	$\frac{1}{2} = \text{جب } 30^\circ$
$\sqrt{3} = \text{ظل } 30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{تجب } 30^\circ$

• $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا ب}} = \text{جب } 60^\circ$

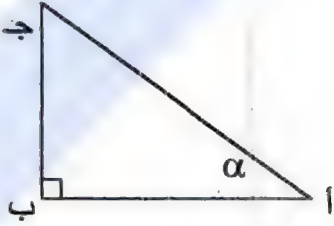
• $\frac{1}{2} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ا ب}} = \text{تجب } 60^\circ$

• $\sqrt{3} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{ب هـ}} = \text{ظل } 60^\circ$

• $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب ا}} = \text{تظل } 60^\circ$

$\sqrt{3} = \text{ظل } 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جب } 60^\circ$
$\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{ظل } 60^\circ$	$\frac{1}{2} = \text{تجب } 60^\circ$

الزاوية 0°



أب ج مثلث قائم في ب ، α زاوية حادة منه :

$$\frac{\text{أب}}{\text{أج}} = \alpha \text{ و } \frac{\text{بج}}{\text{أج}} = \alpha$$

إذا كان : $\alpha = 0$ تكون النقطة ج منطبقة على النقطة ب ،

$$\text{اي : } \frac{\text{أب}}{\text{أج}} = 0 \text{ و } \frac{\text{بج}}{\text{أج}} = 0$$

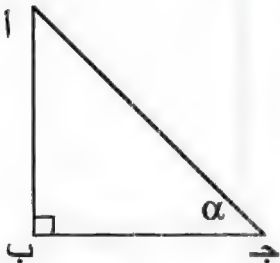
$$\text{ومنه : } \frac{\text{أب}}{\text{أج}} = 0 = 1 \text{ و } \frac{\text{بج}}{\text{أج}} = 0 = 0$$

$$\frac{\text{أب}}{\text{أب}} = \frac{\text{بج}}{\text{أب}} = \frac{0}{\text{أب}} = 0$$

$$\frac{\text{أب}}{\text{بج}} = \frac{\text{أب}}{0} = 0 \text{ تظل غير موجود}$$

ظل $0 = 0$	جيب $0 = 0$
تظل 0 غير موجود	تجب $0 = 1$

الزاوية 90°



$$\frac{\text{أب}}{\text{أج}} = \alpha \text{ و } \frac{\text{بج}}{\text{أج}} = \alpha$$

إذا كان $\alpha = 90^\circ$ تكون ج منطبقة على ب
أي : $\frac{\text{أب}}{\text{أج}} = 0$ و $\frac{\text{بج}}{\text{أج}} = 1$

ومنه :

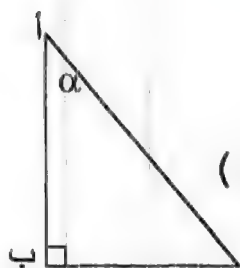
$$1 = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ب}} = \sin 90^\circ \quad \text{و} \quad 0 = \frac{0}{\text{أ ج}} = \cos 90^\circ$$

$$\text{ظل } 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \text{ غير موجود}$$

$$\text{تظل } 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1}$$

ظل 90° غير موجود	جيب $90^\circ = 1$
تظل $90^\circ = 0$	تجب $90^\circ = 0$

(2) العلاقات الأساسية بين جيب و جيب تمام زاوية حادة



أ ب ج مثلث قائم في ب ، α قياس زاوية حادة منه :
لدينا :

$$\text{تجب } \alpha = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} \text{ أي : } \text{أ ب} = \text{أ ج} \cdot \text{تجب } \alpha \text{ (1)}$$

$$\text{جب } \alpha = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} \text{ أي : } \text{ب ج} = \text{أ ج} \cdot \text{جب } \alpha \text{ (2)}$$

بالتربيع نجد :

$$\text{أ ب}^2 = \text{أ ج}^2 \cdot (\text{تجب } \alpha)^2$$

$$b_j^2 = a_j^2 (\alpha_j)^2$$

وبالجمع نحصل على :

$$a_b^2 + b_j^2 = a_j^2 (\alpha_j)^2 + (a_j^2 (\alpha_j)^2)$$

$$= a_j^2 [(\alpha_j)^2 + (\alpha_j)^2]$$

ومنه :

$$\frac{a_b^2 + b_j^2}{a_j^2} = (\alpha_j)^2 + (\alpha_j)^2$$

$$1 = (\alpha_j)^2 + (\alpha_j)^2 \quad \text{(لأن : } a_j^2 = a_b^2 + b_j^2 \text{)}$$

لتبسيط الكتابة نكتب :

$$\alpha_j^2 = (\alpha_j)^2 \quad ; \quad \alpha_j^2 = (\alpha_j)^2$$

فيكون :

$$1 = \alpha_j^2 + \alpha_j^2$$

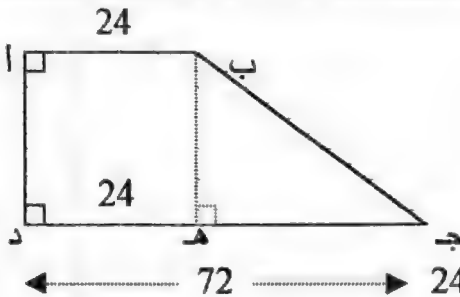
4. تمرين محلولة

تمرين 1

أ ب ج د شبه منحرف قائم في أ و د ، حيث :
 أ ب = 24 ، د ج = 72 . (وحدة الطول هي السنتيمتر) .

ظل ج = $\frac{3}{4}$ وليكن هـ هو المسقط العمودي للنقطة ب على (ج د) .
 احسب كلا من : ج ب ج و تجب ج

الحل



لحساب ج ب ج و تجب ج
 نحسب أطوال أضلاع المثلث
 ب هـ ج القائم في هـ .

حساب ج هـ :

أ ب هـ د مستطيل إذن : هـ د = ب أ = 24
 ومنه : ج هـ = ج د - د هـ = 72 - 24
 48 =

حساب ج ب ج :

لدينا : ظل ج = $\frac{3}{4} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ج هـ}}$ (من التعريف)

إذن : ب هـ = $\frac{3}{4} \times \text{ج هـ}$ أي : $\frac{3}{4} = \frac{\text{ب هـ}}{48}$

ومنه : ب هـ = $48 \times \frac{3}{4} = 36$ أي : ب هـ = 36

حساب ب ج :

لدينا : ب ج = ب ه + ه ج (نظرية فيثاغورث)

$$\begin{array}{c} 2 \quad 2 \quad 2 \\ 48 + 36 = \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \quad 2 \quad 2 \\ (8 \times 6) \times (6 \times 6) = \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \quad 2 \quad 2 \\ (8 + 6) \times 6 = \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ 100 \times 6 = \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 10 \times 6 = \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 10 \times 6 \sqrt{\quad} = \text{ب ج : ومنه} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 10 \sqrt{\quad} \times 6 \sqrt{\quad} = \end{array}$$

$$10 \times 6 =$$

$$\text{ب ج} = 60$$

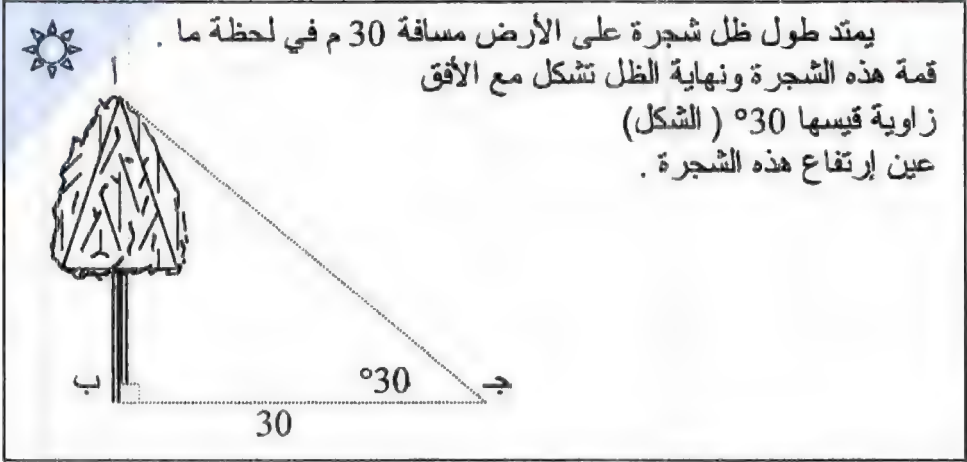
حساب النسبتين المتثلثيتين جب ج و تجب ج

$$\begin{array}{c} 3 \quad 36 \quad \text{ب ه} \\ \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{60} = \frac{\quad}{\text{ب ج}} = \text{جب ج} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 4 \quad 48 \quad \text{ه ج} \\ \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{60} = \frac{\quad}{\text{ب ج}} = \text{تجب ج} \end{array}$$

$$\frac{4}{5} = \text{تجب ج}$$

$$\frac{3}{5} = \text{جب ج}$$



أ ب
 ————— = ظل 30° ومنه :
 ب ج

نعلم أن : ظل $30^\circ = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ وبالتالي :
 $\frac{\sqrt[3]{3}}{3} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$

إذن : أ ب = $\frac{\sqrt[3]{3}}{3} \times \text{ب ج}$

ومنه : أ ب = $30 \times \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ أي : أ ب = $10 \sqrt[3]{3}$ م

تسماريير

بصفا (أوب) حلافة بمعلومية إحدى نسبها المثلث

1 أنشئ الزاوية الحادة [ب أ ؛ ب ج] حيث : $\widehat{أ ب ج} = \frac{3}{4}$

2 أنشئ الزاوية الحادة [د ج ؛ د ه] حيث : $\widehat{ج د ه} = \frac{1}{2}$

3 أنشئ الزاوية الحادة [م ك ؛ م ل] حيث : $\widehat{ك م ل} = \frac{4}{5}$

في كل ما يأتي (من 4 إلى 12) أ ب ج مثلث قائم في أ .
أ ب ؛ أ ج ؛ ب ج هي أطوال أضلاعه بالسنتيمتر .

أ ؛ ب ؛ ج هي أقياس زواياه بالدرجات .

4 أ ب = 5 ؛ ب ج = 13 - احسب : $\widehat{ج ب ج}$ ؛ $\widehat{ج ب ج}$ ؛ $\widehat{ظ ل ج}$

- استنتج : $\widehat{ج ب ب}$ ؛ $\widehat{ج ب ب}$ ؛ $\widehat{ظ ل ب}$

5 أ ب = 3 ؛ أ ج = 4 - احسب : $\widehat{ج ب ب}$ ؛ $\widehat{ج ب ب}$ ؛ $\widehat{ظ ل ب}$

6 أ ب = $1 - \sqrt{2}$ ؛ ب ج = $1 + \sqrt{2}$

- احسب : $\widehat{ج ب ج}$ ؛ $\widehat{ج ب ج}$ ؛ $\widehat{ظ ل ج}$

7 أ ب = 20 ؛ ب ج = 40 - احسب : $\widehat{ج ب ج}$ ؛ $\widehat{ج ب ج}$

8 أ ب ج = 10 ؛ أ ج ب = $5\sqrt{3}$

- احسب : $\widehat{ج ب ج}$ ؛ $\widehat{ج ب ج}$

$$\frac{3}{5} = \widehat{ب} \quad 9 \quad \text{أب} = 3 ; \text{تجب} \widehat{ب} = \frac{3}{5}$$

- احسب : أ ج ؛ ب ج

$$\frac{28}{53} = \widehat{ب} \quad 10 \quad \text{أب} = 4,5 ; \text{جب} \widehat{ب} = \frac{28}{53}$$

- احسب : أ ج ؛ ب ج

$$1,02 = \widehat{ب} \quad 11 \quad \text{أب} = 3,5 ; \text{ظل} \widehat{ب} = 1,02$$

- احسب : أ ج و ب ج

$$0,31 = \widehat{ج} \quad 12 \quad \text{ب ج} = 7,2 ; \text{تجب} \widehat{ج} = 0,31$$

- احسب : أب ؛ أ ج

$$5 = \text{ب د} ; 12 = \text{ب ج} ; \text{ب ج د مثلث قائم في ب حيث : ب ج} \quad 13$$

نمتد الضلع [ب د] إلى نقطة د' بحيث : د د' = 4 و د و [ب د'] .

- (1) احسب : ج د ؛ ج د' .
- (2) احسب النسب المثلثية لكل من الزاويتين : ب ج د ؛ ب ج د' .

جب α

العلاقان : جب α + تجب α = 1 ؛ ظل α = ——— حيث α قياس زاوية حادة .

تجب α

احسب فيما يلي نسبتي مثلثيتين للزاوية الحادة α بمعلومية إحدى النسب المثلثية لها

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{تجب} \alpha \quad 14$$

احسب جب α ؛ ظل α

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{تجب} \alpha \quad 15$$

احسب : جب α ؛ ظل α

$$\frac{1}{2} = \alpha \text{ جب } \boxed{16}$$

أحسب تجب α ؛ ظل α

$$\frac{3}{5} = \alpha \text{ جب } \boxed{17}$$

أحسب تجب α ؛ ظل α

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \alpha \text{ جب } \boxed{18}$$

أحسب تجب α ؛ ظل α

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{4} = \alpha \text{ تجب } \boxed{19}$$

أحسب جب α ؛ ظل α

$$\frac{5}{12} = \alpha \text{ ظل } \boxed{20}$$

أحسب جب α ؛ تجب α

$$\frac{15}{8} = \alpha \text{ ظل } \boxed{21}$$

أحسب : جب α ؛ تجب α

$$\frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \alpha \text{ جب } \boxed{22}$$

أحسب تجب α ؛ ظل α

١ - أنشطة تمهيدية

لنكن الجمل الرياضية التالية :

$$(1) : 2 = 1 + 1$$

$$(2) : \pi \neq 2$$

$$(3) : 4 = 3 + 2$$

$$(4) : 0 < 1 -$$

$$(5) : \text{س د ط ، س - 1 = 12}$$

$$(6) : \text{س د ط ، ع د ط : س} \geq \text{ع}$$

$$(7) : \text{من أجل كل عددين طبيعيين س و ع : س + ع = ع + س}$$

$$(8) : \text{يوجد على الأقل عددا طبيعيا س بحيث : س + 5 = 2 .}$$

. لاحظ أن :

- هذه الجمل تتركب من كلمات ورموز محددة المعنى .

- كل من هذه الجمل تعبر عن معنى رياضي محدد .

. تحقق أنه : كل من (1) ؛ (2) ؛ (7) لها معنى رياضي صحيح ، بينما كل

من (3) ؛ (4) ؛ لها معنى رياضي خاطئ .

العبارتان : (5) ؛ (6) لا يمكن الحكم عليهما بالصحة أو الخطأ .

. كل عبارة يمكننا الحكم عليها إما بالصحة أو بالخطأ تسمى قضية .

. كل عبارة لا يمكننا الحكم عليها بالصحة أو بالخطأ ليست قضية .

2 - مفردات المنطق

(1) القضايا تعريف

نسمي قضية كل جملة يمكن الحكم عليها إما بالصحة وإما بالخطأ .

أمثلة :

- 3
- " $2 = 8$ " و " $5 > 7$ " قضيتان صحيحتان .
" $3 > 0$ " و " 14 عدد أولي " هما قضيتان خاطئتان .
" $4 + 0 \neq 0$ " ليست قضية لأنه لا يمكن الحكم عليها بالصحة أو بالخطأ .
نرمز إلى كل قضية بحرف مثل : ق ، ك ، ل ، ...
كل قضية صحيحة ترفق بالرمز 1 ، وكل قضية خاطئة ترفق بالرمز 0 .
كل من 0 ، 1 هو قيمة الحقيقة للقضية .

(2) الروابط المنطقية :

ندرس فيما يلي بعض الأدوات التي تسمح بإيجاد قضايا جديدة .

نفي قضية
تعريف

ق قضية
نفي القضية $\overline{ق}$ هي القضية التي نرمز إليها بالرمز $\overline{ق}$. تكون $\overline{ق}$ صحيحة إذا كانت ق خاطئة وتكون ق خاطئة إذا كانت ق صحيحة .

الجدول الآتي هو جدول الحقيقة للقضية $\overline{ق}$:

$\overline{ق}$	ق
0	1
1	0

أمثلة

- . نفي القضية الصحيحة " $2 + 2 = 4$ " هو القضية الخاطئة " $2 + 2 \neq 4$ "
 . نفي القضية الخاطئة " $5 < 3$ " هو القضية الصحيحة " $3 \leq 5$ "
 . نفي القضية الصحيحة " 10 يقبل القسمة على 5 " هو القضية الخاطئة :
 " 10 لا يقبل القسمة على 5 "
 . نفي القضية الخاطئة " 1 عدد أولي " هو القضية الصحيحة " 1 ليس عددا أوليا".

الوصل

تعريف

وصل قضيتين ق ، ك هو قضية لا تكون صحيحة إلا إذا كانت ق و ك
 صحيحتين معا .

نرمز إلى وصل قضيتين ق ، ك بالرمز : ق \wedge ك وتقرأ (ق و ك)
 الجدول الآتي هو جدول الحقيقة للقضية ق \wedge ك :

ق	ك	ق \wedge ك
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أمثلة :

- . القضية [$(2 + 2 \neq 4) \wedge (5 > 3)$] خاطئة
 . القضية [$(1 + 1 = 2) \wedge$ (كل مربع هو مستطيل)] صحيحة

الفصل

تعريف

فصل قضيتين ق ، ك هو قضية لا تكون خاطئة إلا إذا كانت ق و ك
 خاطئتين معا .

نرمز إلى فصل قضيتين ق ، ك بالرمز : ق \vee ك وتقرأ (ق أو ك)
 الجدول الآتي هو جدول الحقيقة للقضية ق \vee ك :

ق	ك	ق ∨ ك
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- القضية [(5 عدد أولي) ∨ (4 عدد زوجي)] صحيحة .
القضية [(5 عدد أولي) ∨ (4 عدد فردي)] صحيحة .
القضية [(4 عدد أولي) ∨ (5 عدد زوجي)] خاطئة .

الاستلزام

ق ، ك قضيتان
نسمي القضية $ق \supset ك$ استلزما .

نرمز إلى الاستلزام $ق \supset ك$ بالرمز : $ق \Rightarrow ك$.
ونقرأ :

- إذا كان ق فإن ك
أو أيضا : ق يستلزم ك
الجدول الآتي هو جدول الحقيقة للاستلزام (ق \Rightarrow ك)

ق	ك	$\overline{ق}$	$ق \supset ك$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

ملاحظة : لا يكون الاستلزام (ق \Rightarrow ك) خاطئا إلا إذا كانت القضية الأولى صحيحة والقضية الثانية خاطئة .
تسمى القضية ق مقدمة الاستلزام ، وتسمى القضية ك نتيجة الاستلزام .

أمثلة :

1 2
 $(2 = 2) \Leftrightarrow (4 = 2)$ قضية صحيحة
 $(1 > 2) \Leftrightarrow (1 < 1)$ قضية خاطئة
 ((مدينة البليدة هي عاصمة الجزائر) \Leftrightarrow (تقع مدينة البليدة شرق مدينة قسنطينة))
 قضية صحيحة .

المنطق

ق ، ك قضيتان
 التكافؤ المنطقي للقضيتين ق ، ك هو القضية :
 $[(ق \Leftrightarrow ك) \wedge (ك \Leftrightarrow ق)]$

نرمز إلى التكافؤ المنطقي للقضيتين ق ، ك بالرمز : $ق \Leftrightarrow ك$.
 ونقرأ :

ق يكافئ منطقيا ك
 وقرأ أيضا : ق إذا وفقط إذا ك
 الجدول الآتي هو جدول الحقيقة للتكافؤ $(ق \Leftrightarrow ك)$

ق	ك	$ق \Leftrightarrow ك$	$ك \Leftrightarrow ق$	$ق \Leftrightarrow ك$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

لا يكون التكافؤ المنطقي $ق \Leftrightarrow ك$ صحيحا إلا إذا كانت ق و ك صحيحتين معا أو خاطئتين معا .

أمثلة :

(5 عدد أولي) \Leftrightarrow (4 عدد زوجي) قضية صحيحة
 صحيحة
 (5 عدد زوجي) \Leftrightarrow (4 عدد أولي) قضية صحيحة
 خاطئة
 خاطئة

$(5 = 2) \Leftrightarrow (9 = 3)$ قضية خاطئة
خاطئة صحيحة

$(\text{عدد أيام الأسبوع } 7) \Leftrightarrow (\text{الدائرة هي مربع})$ قضية خاطئة
صحيحة خاطئة

نفي الوصل
لندرس جدول الحقيقة للقضيتين : $\overline{ق \wedge ك}$ و $\overline{ق \vee ك}$

$\overline{ق}$	$\overline{ك}$	$\overline{ق \wedge ك}$	$\overline{ق \vee ك}$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

هذا الجدول يبين أن القضيتين : $\overline{ق \wedge ك}$ و $\overline{ق \vee ك}$ نفس جدول الحقيقة .
أي لهما نفس القيمة .
مثال : نفي القضية $[(2 + 2 \neq 4) \wedge (5 > 3)]$ هو القضية :

$$[(2 + 2 = 4) \vee (5 \leq 3)] \text{ أي } \overline{[(2 + 2 \neq 4) \wedge (5 > 3)]}$$

نفي الفصل
لندرس جدول الحقيقة للقضيتين : $\overline{ق \vee ك}$ و $\overline{ق \wedge ك}$

$\overline{ق}$	$\overline{ك}$	$\overline{ق \vee ك}$	$\overline{ق \wedge ك}$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

هذا الجدول يبين أن القضيتين : ق \vee ك و ق \wedge ك نفس جدول الحقيقة .
أي لهما نفس القيمة .

مثال : نفي القضية [(5 عدد أولي) \vee (4 عدد زوجي)] هو القضية :

[(5 عدد أولي) \wedge (4 عدد زوجي)] أي [(5 غير أولي) \wedge (4 عدد فردي)]

(3) الجمل المفتوحة

لتكن العبارات التالية :

(1) "س عدد طبيعي : $s + 3 = 12$ "

(2) "س ، ع عددان طبيعيان : $s \geq e$ "

كل من (1) و (2) ليست قضية . لماذا ؟

. تحقق أنه من أجل $s = 9$ (1) تصبح قضية صحيحة

ومن أجل $s = 0$. (1) تصبح قضية خاطئة .

. تحقق كذلك أنه :

- من أجل $s = 2$ و $e = 3$ (2) تصبح قضية صحيحة

- من أجل $s = 5$ و $e = 0$ (2) تصبح قضية خاطئة .

فكل من (1) و (2) تصبح قضية بعد تعويض س و ع بقيم عددية .

كل من (1) و (2) تسمى جملة مفتوحة في المجموعة ط

ومنه :

تعريف

الجملة المفتوحة المعرفة في مجموعة س ، هي جملة تشمل متغيرا أو أكثر من س ، و تصبح قضية إذا عوضنا كلا من متغيراتها بقيم من المجموعة س .

نرمز إلى كل جملة مفتوحة ذات متغير س من مجموعة س بالرمز :

ق(س) أو ك(س) أو ...

نرمز إلى كل جملة مفتوحة ذات متغيرين س ، ع من مجموعة س بالرمز :

ق(س ، ع) أو ك(س ، ع) أو ...

(4) المكملات

نقدم فيما يلي : أداتين تحولان جملة مفتوحة إلى قضية .

المكمل الكلي " V "

لتكن الجملة المفتوحة :

²

ق(س) : " س \exists ح : س - س = س (س - 1) "

لاحظ أن الطرف الأول هو نشر الطرف الثاني وأن الطرف الثاني هو تحليل الطرف الأول إلى عاملين .

²

فالمساواة : س - س = س (س - 1) محققة من أجل كل عدد حقيقي س

إن تصبح الجملة المفتوحة ق(س) قضية صحيحة من أجل كل عدد حقيقي س .
نعبّر عن ذلك بالقول :

²

مهما يكن العدد الحقيقي س فإن : س - س = س (س - 1) ونكتب :

²

V س \exists ح : س - س = س (س - 1)

يسمى الرمز V المكمل الكلي .

ويقرأ " مهما يكن " أو " من أجل كل " الجملة المفتوحة المكملة بالمكمل الكلي تصبح قضية .

المكمل الوجودي " E "

لتكن الجملة المفتوحة :

²

ك(س) : " س \exists ح ؛ س - 1 = 0 "

²

لاحظ أن المساواة : س - 1 = 0 محققة من أجل القيمتين 1 و - 1 .

فالجملة المفتوحة ك(س) تصبح قضية صحيحة من أجل قيمة واحدة على الأقل للمتغير س .

نعبّر عن ذلك بالقول :

²

يوجد على الأقل عدد حقيقي س بحيث : س - 1 = 0 ونكتب :

²

E س \exists ح : س - 1 = 0

يسمى الرمز E المكمل الوجودي ويقرأ :

" يوجد على الأقل "

الجملة المفتوحة المكملة بالمكمل الوجودي تصبح قضية .

نفي قضية تشمل مكما

- (1)..... " كل تلاميذ القسم نجباء "
- (2)..... " بعض تلاميذ القسم غير نجباء "
- هما قضيتان كل واحدة منهما نفي للأخرى .
- لتكن مج هي مجموعة تلاميذ القسم
- ق(س) هي الجملة المفتوحة " س تلميذ نجيب "
- القضية (1) تكتب على الشكل : $\forall \text{ س } \text{مج} : \text{ق(س)}$

القضية (2) تكتب على الشكل : $\exists \text{ س } \text{مج} : \text{ق(س)}$

لاحظ أننا حصلنا على نفي (1) بتبديل الرمز \forall بالرمز \exists و ق(س) بنفيها

ق(س) .
بصفة عامة

لإيجاد نفي قضية تشمل مكما نبذل كلاما من المكملين \forall و \exists بالآخر
وننفي الجملة المفتوحة التي تلي المكمل .

مثال :

ق(س) : $\forall \text{ س } \text{ط} : \text{س زوجي} .$

ق(س) : $\exists \text{ س } \text{ط} : \text{س فردي}$

ك(س) : $\exists \text{ س } \text{ط} : \text{س} + 1 > 1$

ك(س) : $\forall \text{ س } \text{ط} : \text{س} + 1 \leq 1$

3- تطبيقات

القضايا البينة

ق ، ك قضيتان . لندرس جدول الحقيقة للقضية :

$$(ق \wedge ك) \Leftrightarrow (ك \wedge ق)$$

لدينا :

ق	ك	ق و ك	ك و ق	$(ق \wedge ك) \Leftrightarrow (ك \wedge ق)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

لاحظ أن : $(ق \wedge ك)$ ؛ $(ك \wedge ق)$ لهما نفس جدول الحقيقة .

نقول إن الوصل تبديلي .

لاحظ أن القضية $[(ق \wedge ك) \Leftrightarrow (ك \wedge ق)]$ هي قضية صحيحة مهما كانت ق و ك .

نقول إن : $[(ق \wedge ك) \Leftrightarrow (ك \wedge ق)]$ هي قضية بيتنة .

. توجد قضايا بينة أخرى مثل : $[(ق \vee ك) \Leftrightarrow (ك \vee ق)]$.

العكس النقيض للاستلزام

ق ، ك قضيتان .

لندرس جدول الحقيقة لكل من $(ق \Leftarrow ك)$ و $(ك \Leftarrow ق)$

لدينا :

ق	ك	$\overline{ق}$	$\overline{ك}$	$ق \Leftarrow ك$	$ك \Leftarrow ق$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

الجدول يبين أن للقضيتين $(ق \Leftarrow ك)$ و $(ك \Leftarrow ق)$ نفس جدول الحقيقة ،

فهما متكافئتان .

يسمى الاستلزام $(ق \Leftarrow ك)$ العكس النقيض للاستلزام $(ك \Leftarrow ق)$.

نكتب : $(ق \Leftarrow ك) \Leftrightarrow (ك \Leftarrow ق)$

4. تمارين محلولة

تمرين 1

ق ، ك قضيتان .
بين باستعمال جدول الحقيقة أن : $[ق \Leftarrow (ق \vee ك)]$ هي قضية صحيحة
مهما كانت القضيتان ق و ك .

الحل

لدينا :

ق	ك	$ق \vee ك$	$ق \Leftarrow (ق \vee ك)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

يبين الجدول أن القضية $[ق \Leftarrow (ق \vee ك)]$ هي قضية صحيحة مهما كانت ق و ك .

تمرين 2

ن عدد طبيعي .
أثبت صحة الاستلزام :

$$2 \quad (ن \text{ فردي}) \Leftarrow (ن \text{ فردي})$$

لإثبات صحة هذا الاستلزام يكفي أن نفرض أن القضية (ن فردي) صحيحة ،
ونبرهن على أن القضية (ن فردي) صحيحة .
ليكن ن عددا طبيعيا فرديا :
إذن : $n = 2k + 1$ حيث ك طبيعي .
فيكون : $n^2 = (2k + 1)^2$
 $= 4k^2 + 4k + 1$
 $= 2(2k^2 + 2k) + 1$
 $n^2 = 2\hat{k} + 1$ (بوضع : $\hat{k} = 2k^2 + 2k$)
إذن : ن فردي وبالتالي الاستلزام (ن فردي) \Leftarrow (ن فردي) صحيح .

تمارين

القضايا

1

- من بين الجمل التالية ، عين التي تمثل قضية .
- (1) المثلث المتقايس الأضلاع هو مثلث متساوي الساقين .
 - (2) منصف زاوية الرأس في مثلث متساوي الساقين هو محور القاعدة .
 - (3) 2 و 3 عدنان أوليان فيما بينهما .
 - (4) س عدد حقيقي موجب .
 - (5) الرباعي أ ب ج د هو مربع .
 - (6) $2 = {}^3_2 \left[{}^5_2 \right]$

$$(7) \quad {}^7_3 = {}^5_3 \left[{}^2_3 \right]$$

$$(8) \quad {}^2_5 = {}^2_4 + {}^2_3$$

2

لتكن القضيتان :

ق : " 4 مضاعف 2 "

ك : " 4 مضاعف 3 "

عبر لغويا عن القضايا الآتية ، ثم أذكر الصحيحة منها وال خاطئة .

$\overline{ق} ; ق \wedge ك ; ق \vee ك ; ق \Leftrightarrow ك ; ك \Leftrightarrow ق ; ق \Leftrightarrow \overline{ق} ; ك \Leftrightarrow \overline{ق} .$

3

بين باستعمال جداول الحقيقة أن القضايا الآتية صحيحة مهما كانت القضيتان ق و ك :

$ق \Leftrightarrow (ق \wedge ك) ; ق \Leftrightarrow (ك \Leftrightarrow ق) ; (ق \wedge ك) \Leftrightarrow ق$

4

ق ؛ ك ؛ ل ثلاث قضايا :

أذكرني نفي كل من القضايا التالية :

$(ق \wedge ك) \vee ل ; (ق \wedge ك) \vee \overline{ل} ; (ق \Leftrightarrow ك) \wedge ل ; ق \Leftrightarrow (ك \wedge ل)$

5 ق(س) ؛ ك(س) ؛ ل(س) ثلاث جمال مفتوحة معرفة على مجموعة الأعداد

الحقيقية ح حيث : ق(س) : $6 > س$

ك(س) : $2 < س$

ل(س) : $4 \leq س$

عبر عن كل من الجمال المفتوحة المركبة التالية بمجالات : ق(س) ٨ ك(س) ؛
ق(س) ٧ ك(س) ؛ [ق(س) ٨ ك(س)] ٧ ل(س) ؛ [ق(س) ٧ ك(س)] ٨ ل(س)

6 م مجموعة مثلثات المستوي

لتكن الجملة المفتوحة ق(س) : " م مثلث متساوي الساقين " المعرفة على م

1) عبر باستعمال المكتملات عن كل من القضايا التالية :

(1) كل المثلثات متساوية الساقين .

(2) كل المثلثات ليست متساوية الساقين .

(3) أي مثلث ليس متساوي الساقين .

(4) أي مثلث ليس غير متساوي الساقين .

(5) هناك على الأقل مثلث متساوي الساقين .

(6) هناك على الأقل مثلث غير متساوي الساقين .

2) عبر عن نفي كل واحدة من القضايا السابقة .

7 ص مجموعة الأعداد الصحيحة

ص* مجموعة الأعداد الصحيحة غير المعدومة .

ك هي مجموعة الأعداد الناطقة .

بين صحة أو خطأ كل من القضايا التالية . ثم عبر عن نفي كل منها .

(1) $\forall س \in ص : س < 0$

(2) $\forall س \in ص : س \neq 0$

(3) $\forall س \in ص^* : \frac{1}{س} \in ص$

س

$$(4) \forall s \exists v : s < 0 \quad 3 - s$$

$$(5) \forall s \exists v : \frac{2}{2 + s} < 0$$

$$(6) \forall s \exists v : \frac{3 + s}{4 + s^2} < 0$$

$$(7) \exists s \exists v : s < 0$$

$$(8) \exists s \exists v : s \neq 0$$

$$(9) \exists s \exists v : s < 2515$$

$$(10) \exists s \exists v : s > 0$$

$$(11) \exists s \exists v : -s - 7 \leq 0$$

ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة .
بين صحة أو خطأ كل من القضايا التالية ، ثم عبر عن نفي كل منها .

$$(1) \exists s \exists v , \forall e \exists v : s + e < 0$$

$$(2) \forall s \exists v , \forall e \exists v : s + e \leq 0$$

$$(3) \forall s \exists v , \exists e \exists v : s = e$$

$$(4) \forall s \exists v , \forall e \exists v : s \neq e$$

$$(5) \exists s \exists v , \exists e \exists v : s \neq e$$

$$(6) \forall s \exists v , \exists e \exists v : s = e$$

1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

س عدد صحيح .

ق(س) : $-2 \leq s$ جملة مفتوحة معرفة في \mathbb{Z} .

- ما هي قيمة كل من القضايا : ق(1) ، ق(2) ، ق(0) ، ق(3) ، ق(4) ؟

- هل كل من ق($\frac{1}{2}$) و ق($\sqrt{2}$) قضية معرفة في \mathbb{Z} ؟

- لتكن L هي قائمة الأعداد الصحيحة s بحيث تصبح ق(س) قضية صحيحة .
عين L .

المجموعة L هي مجموعة الأعداد الصحيحة التي تجعل الجملة المفتوحة ق(س) قضية صحيحة في \mathbb{Z} .

نكتب : $L = \{s \in \mathbb{Z} : \text{ق(س) صحيحة}\}$.

ق(س) تسمى الخاصية المميزة للمجموعة L . المجموعة L هي جزء من \mathbb{Z}

ونكتب $L \subset \mathbb{Z}$ ونقرأ :

" المجموعة L محتواة في المجموعة \mathbb{Z} "

ق(س) و ك(س) جملتان مفتوحتان حيث :

ق(س) : [س عدد طبيعي أولي و س ≥ 13]

ك(س) : [س عدد طبيعي فردي و س ≥ 13]

أ و ب هما المجموعتان :

$$A = \{س \in \mathbb{P}, ق(س)\} , B = \{س \in \mathbb{P}, ك(س)\}$$

. عين عناصر كل من أ و ب .

. عين المجموعتين : A^c ، B^c حيث :

$$A^c = \{س \in \mathbb{P}, ق(س) \wedge ك(س)\}$$

$$B^c = \{س \in \mathbb{P}, ق(س) \vee ك(س)\}$$

لاحظ أن : A^c هي مجموعة العناصر المشتركة بين أ و ب ، وأن B^c هي مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين أ و ب .

A^c هي تقاطع أ و ب ونرمز إليها بالرمز : $A \cap B$

B^c هي إتحاد أ و ب ونرمز إليها بالرمز : $A \cup B$

كل من \cap و \cup هو رمز لعمليات على المجموعات لاحظ التوافق بين الوصل والنقاط من جهة والتوافق بين الفصل والاتحاد من جهة أخرى .

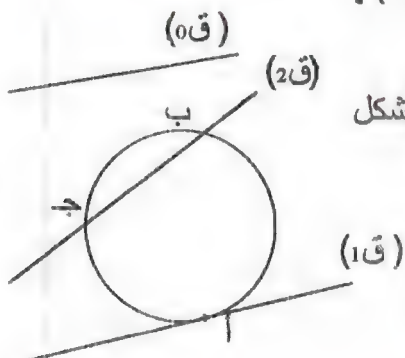
2 . العمليات على المجموعات

(1) التقاطع تعريف

تقاطع المجموعتين ك و ل هو مجموعة العناصر المشتركة بين ك و ل .

تكون صياغة هذا التعريف باستعمال الوصل كما يلي :

$$ك \cap ل = \{ س / (س \in ك) \wedge (س \in ل) \}$$



مثال : (د) دائرة

(0ق) ، (1ق) ، (2ق) مستقيمات كما في الشكل

$$لدينا : (د) \cap (1ق) = \{ أ \}$$

$$(د) \cap (2ق) = \{ ب ، ج \}$$

$$(د) \cap (0ق) = \emptyset$$

نقول إن (د) و (0ق) مجموعتان منفصلتان .

(2) الإتحاد تعريف

اتحاد المجموعتين ك و ل هو مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بينهما .

تكون صياغة هذا التعريف باستعمال الفصل كما يلي :

$$ك \cup ل = \{ س / (س \in ك) \vee (س \in ل) \}$$

مثال : لنكن س و ع هما مجموعتا الأعداد الطبيعية الفردية والأعداد الطبيعية الزوجية على الترتيب لدينا :

$$س \cup ع = ط$$

(3) المتممة تعريف

أ مجموعة جزئية من مجموعة س.
متممة أ إلى س هي مجموعة عناصر س التي لا تنتمي إلى أ

نرمز إلى متممة أ إلى س بالرمز \bar{A}

وتكون صياغة هذا التعريف كالتالي :

$$\bar{A} = \{s / (s \in S) \wedge (s \notin A)\}$$

مثال :

لتكن س هي مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية

$$\bar{S} = \{s / (s \in \mathbb{N}) \wedge (s \notin S)\}$$

$$\text{أي : } \bar{S} = \{s / (s \in \mathbb{N}) \wedge (s \text{ زوجي})\}$$

إذن : \bar{S} هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية .

(4) فرق مجموعتين تعريف

فرق المجموعتين ك و ل بهذا الترتيب ، هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ك ولا تنتمي إلى ل .

نرمز إلى فرق المجموعتين ك و ل بهذا الترتيب بالرمز ك - ل .

$$\text{ونكتب : } K - L = \{s / (s \in K) \wedge (s \notin L)\}$$

$$\text{مثال : } K = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\} , L = \{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$$

$$\text{لدينا : } K - L = \{0 ; 2 ; 4\}$$

$$L - K = \{7\}$$

5) مجموعة أجزاء مجموعة

لتكن المجموعة $S = \{a, b, c\}$
نعلم أن المجموعة الخالية \emptyset هي جزء من أي مجموعة .
لاحظ أن :

المجموعات ذات عنصر واحد من S هي : $\{a\}, \{b\}, \{c\}$.

المجموعات ذات عنصرين من S هي : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

المجموعات ذات ثلاث عناصر من S هي : $\{a, b, c\}$.

هذه المجموعات تشكل مجموعة تسمى مجموعة أجزاء S نرمز إليها بالرمز $\mathcal{P}(S)$ ونكتب :

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

3. تطبيقات

1) توزيع كل من الاتحاد والتقاطع على الآخر

لتكن المجموعات :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{3, 4, 6\}, C = \{0, 1, 2\}$$

ولنقارن بين المجموعتين : $(A \cup B) \cap C$ و $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{1, 2\} \quad (1)$$

$$A \cap C = \{1, 2\}$$

$$B \cap C = \emptyset$$

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}$$

$$(2) \dots\dots\dots \{1, 2\} =$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

تحقق بطريقة مماثلة أن :
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
 كل من الاتحاد والتقاطع توزيعي على الآخر .

(2) متممات الاتحاد والتقاطع

لنكن المجموعات :

$$S = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}, A = \{3, 5, 7\}, B = \{1, 5, 9\}$$

ولنقارن بين المجموعتين : $A \cup B$ و $(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
 لدينا : $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad (1)$$

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad A \cap B = \{5\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = \{5\} \cup \{1, 3, 7, 9\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cup B$$

تحقق بنفس الطريقة أن :

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cup B$$

وبصفة عامة :

. متممة اتحاد مجموعتين (أو تقاطعهما) هو تقاطع (اتحاد) متممتهما .

3) تجزئة مجموعة :

لتكن المجموعات : $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A = \{0, 2, 4\}$ ؛ $B = \{1, 3\}$ ؛ $C = \{3\}$

لدينا : $A \cap B = \emptyset$ و $A \cup B = S$
المجموعة $\{A, B\}$ تسمى تجزئة للمجموعة S
لاحظ أن :

$A \cap C = \emptyset$ لكن $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4\} = S$
 $A \cup B \neq S$

المجموعة $\{A, C\}$ ليست تجزئة للمجموعة S

تعريف

تجزئة مجموعة غير خالية S هي مجموعة من أجزاء S تحقق الشروط التالية :

- كل عنصر من التجزئة هو جزء غير خال من S
- عناصر التجزئة منفصلة متني متني .
- اتحاد عناصر التجزئة يساوي المجموعة S .

4 - تمرين محلول

ليكن العددين : 36 و 84

- 1 - عين كلا من المجموعتين : ق36 و ق84 .
 - 2 - عين المجموعة : ق36 \cap ق84 .
- ثم اكتب هذه المجموعة بإعطاء خاصية مميزة لها
استنتج ق م أ (36 ، 84) .

الحل

لدينا :

مجموعة قواسم 36 هي : ق36 = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 9 ، 12 ، 18 ، 36 }

مجموعة قواسم 84 هي :

ق84 = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 7 ، 12 ، 14 ، 21 ، 28 ، 42 ، 84 }

مجموعة القواسم المشتركة للعددين 36 و 84 هي :

ق36 \cap ق84 = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12 }

كل عنصر من هذه المجموعة يقسم العددين 36 و 84 .

أي :

ق36 \cap ق84 = { س / س يقسم 36 } \cap { س / س يقسم 84 }

وبالتالي أكبر قاسم مشترك للعددين 36 و 84 هو العدد 12 أي :

ق م أ (36 ، 84) = 12

تمارين

تعيين مجموعة

(1) عين كلا من المجموعات التالية بالقائمة (بذكر عناصرها)

$$ا. \{ (س / (س \ni ط) \wedge (س^2 = 25)) \}$$

$$ب. \{ (س / (س \ni ح) \wedge (س^2 = 36)) \}$$

$$ج. \{ (س / (س \ni ص) \wedge (س^2 \geq 16)) \}$$

$$د. \{ (س / (س \ni هـ) \wedge (2 - س \geq 3)) \}$$

(2) عين بخاصة مميزة كلا من المجموعات التالية :

$$ا. \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$ب. \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

$$ج. \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \}$$

$$د. \{ 5, 10, 15, 20, \dots \}$$

$$هـ. \{ \text{الف, واو, ياء} \}$$

العمليات على المجموعات

(3) لتكن المجموعات :

$$ا. \{ 2, 4, 6 \}, ب. \{ 2, 5 \}, ج. \{ 2, 3, 5, 6 \}$$

(1) أوجد كلا من : $ا \cup ب$; $ا \cup ج$; $ب \cup ج$

$$ا \cap ب ; ا \cap ج ; ب \cap ج$$

(2) بين أن : $(ا \cup ب) \cap ج = (ا \cap ج) \cup (ب \cap ج)$

وأن : $(ا \cap ب) \cup ج = (ا \cup ج) \cap (ب \cup ج)$

(4) لتكن المجموعتان :

$$ا. \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} ; ب. \{ 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

قارن بين المجموعتين : $(ا - ب)$ و $(ب - ا)$

(5) لتكن المجموعتان :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} ; A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$$

(1) عين A و $A - S$ و $S \cap A$.

(2) تحقق أن : $A - S = S \cap A$.

(6) لتكن المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

أ و ب مجموعتان جزئيتان من S حيث :

$$A = \{2, 3, 4, 5\} ; B = \{1, 4, 5, 7, 8\}$$

عين كلا من المجموعات :

$$A \cap B ; A - B ; B - A ; (A - B) \cup (B - A) ; (A \cup B)$$

بين أن المجموعة $\{A \cap B, (A - B) \cup (B - A), (A \cup B)\}$ هي تجزئة للمجموعة S .

(7) لتكن المجموعة $S = \{a, b, c, d\}$

(1) عين $J(S)$ مجموعة أجزاء المجموعة S .

(2) تحقق من أن عدد عناصر $J(S)$ هو 2^4 حيث 4 هو عدد عناصر المجموعة S .

11. العلاقات

1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

ك و ل مجموعتان حيث :

$$\{ا، ب، ج\} = ك ; \{ل، 1، 2\} = ل$$

• عين جميع الثنائيات (س، ع) حيث : (س و ك) ٨ (ع و ل) .

مثلاً : (ا، 1) ؛ (ا، 2)

هذه الثنائيات تشكل مجموعة تسمى الجداء الديكارتي للمجموعتين ك و ل بهذا

الترتيب ، ونرمز إليه بالرمز ك x ل .

أتمم : ك x ل = { (ا، 1) ، (ا، 2) ، } .

نشاط 2 :

لتكن المجموعتان :

$$\{2، 3، 5\} = ك ; \{9، 12، 17، 20\} = ل$$

• عين الجداء الديكارتي ك x ل .

• عين الثنائيات (س، ع) من المجموعة ك x ل التي تحقق الخاصية "س يقسم ع"

الخاصية : ع (س، ع) ؛ "س يقسم ع" التي ترفق عناصر من المجموعة ك

بعناصر من المجموعة ل تعين علاقة من ك إلى ل .

2. العلاقة من مجموعة إلى مجموعة

(1) تعريف :

ك و ل مجموعتان :

كل خاصية ع (س، ع) معرفة على ك x ل تحدد علاقة من ك إلى ل

نرمز للعلاقة بأحد الرموز التالية : ع ، ع₁ ، ع₂ ،

• الكتابة ع (س، ع) تعني أن العلاقة ع ترفق بالعنصر س من ك بالعنصر ع من ل .

• ك تسمى مجموعة بدء العلاقة ، ل تسمى مجموعة وصول العلاقة .

• مجموعة الثنائيات (س،ع) من ك × ل التي تحقق الخاصية γ (س،ع) تسمى بيان العلاقة γ ونرمز إليها بالرمز β_γ . إذن :

$$\beta_\gamma = \{ (س،ع) \mid ك \times ل / \gamma (س،ع) \} .$$

لاحظ أن : $\beta_\gamma \supset ك \times ل$.

مثال 1 :

$$ك = \{ 30 ، 20 ، 17 ، 6 ، 2 \} ، ل = \{ 13 ، 5 ، 4 ، 3 \} .$$

لتكن الخاصية "س مضاعف ع" المعرفة على ك × ل .

هذه الخاصية تحدد العلاقة γ المعرفة على ك × ل كما يلي :

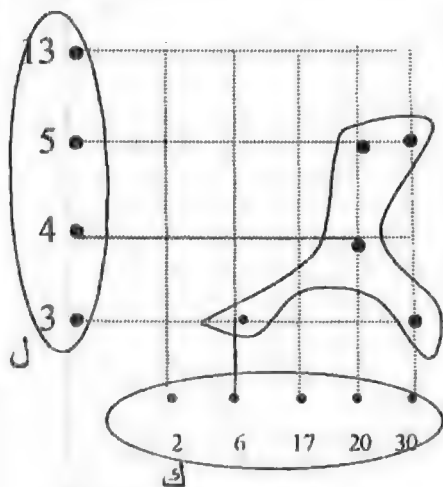
$$\gamma (س،ع) \Leftrightarrow "س مضاعف ع"$$

ومعناه : يرتبط العنصر س من ك مع العنصر ع من ل إذا وقط إذا كان س مضاعف ع

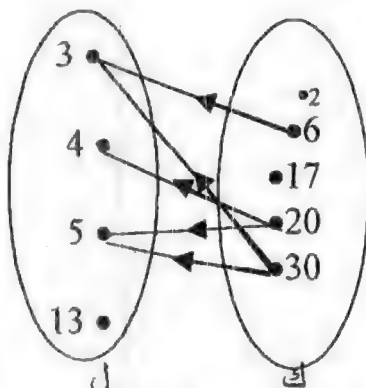
بيان هذه العلاقة هو مجموعة الثنائيات (س،ع) التي تحقق العلاقة γ أي :

$$\beta_\gamma = \{ (3 ، 6) ، (3 ، 20) ، (4 ، 20) ، (5 ، 20) ، (3 ، 30) ، (5 ، 30) \} .$$

• نمثل العلاقة γ بأحد التمثيلين التاليين :



التمثيل البياني للعلاقة γ كل نقطة تمثل ثنائية من البيان

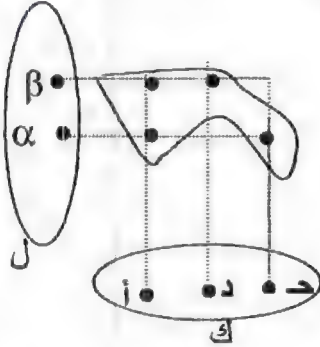


التمثيل السهمي للعلاقة γ كل سهم يمثل ثنائية من البيان

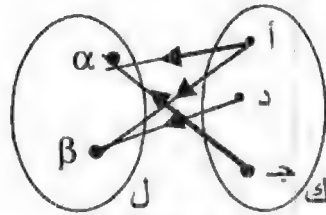
مثال 2 : ك ، ل مجموعتان حيث :

$$ك = \{ \alpha, \beta, \gamma \}, \quad ل = \{ \alpha, \beta \}$$

المجموعة ب = $\{ (\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \beta) \}$ هي جزء من الجداء الديكارتي ك \times ل وهي تعرف علاقة من ك إلى ل بينها ب .
تمثل هذه العلاقة بأحد التمثيلين التاليين :



التمثيل البياني للعلاقة γ
كل نقطة تمثل ثنائية من
البيان



التمثيل السهمي للعلاقة γ
كل سهم يمثل ثنائية من البيان

γ علاقة معرفة من ك إلى ل .

العلاقة العكسية للعلاقة γ ونرمز إليها بالرمز γ^{-1} هي العلاقة من ل إلى ك المعرفة كما يلي :

$$\forall \alpha \in ل, \forall \beta \in ك : \alpha \gamma \beta \Leftrightarrow \beta \gamma^{-1} \alpha$$

الرمز γ^{-1} يقرأ " γ ناقص واحد".

أمثلة :

- لنكن $\gamma_0 (س, ع)$ هي العلاقة المعرفة من ط إلى ط بالخاصية "س مضاعف ع" . فالعلاقة العكسية $\gamma_0^{-1} (س, ع)$ هي العلاقة المعرفة من ط إلى ط بالخاصية "ع يقسم س" .
- لنكن $\gamma_1 (س, ع)$ هي العلاقة المعرفة من ط إلى ط بالخاصية : "س مربع ع" .

فالعلاقة العكسية $\gamma_1^{-1} (س, ع)$ هي العلاقة المعرفة من ط إلى ط بالخاصية "ع هو الجذر التربيعي للعدد س" .

• لتكن المجموعتان: $\{ \alpha, \beta \} = \text{ل}$ ، $\{ \text{أ} , \text{ب} , \text{ج} \} = \text{ك}$.

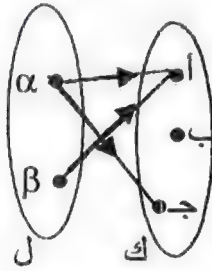
و \mathcal{R}_2 هي العلاقة المعرفة من ك إلى ل ، بياتها \mathcal{R}_2 حيث :

$$\mathcal{R}_2 = \{ (\alpha, \text{أ}) , (\beta, \text{ب}) , (\alpha, \text{ج}) \}$$

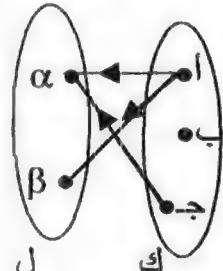
فالعلاقة العكسية لهذه العلاقة هي \mathcal{R}_2^{-1} المعرفة من ل إلى ك بياتها \mathcal{R}_2^{-1} حيث :

$$\mathcal{R}_2^{-1} = \{ (\text{ج}, \alpha) , (\text{ب}, \beta) , (\text{أ}, \alpha) \}$$

نمثل العلاقتين \mathcal{R}_2 و \mathcal{R}_2^{-1} سهميا كما يلي :



تمثيل \mathcal{R}_2^{-1}



تمثيل \mathcal{R}_2

3. العلاقة في مجموعة

(1) تعريف

كل علاقة معرفة من المجموعة ك إلى المجموعة ك نفسها تسمى علاقة في المجموعة ك

بيان العلاقة \mathcal{R} في المجموعة ك هو جزء من ك \times ك ونكتب $\text{ب} \mathcal{R} \text{أ}$ $\Leftrightarrow \text{أ} \mathcal{R} \text{ب}$.
مثال : العلاقة المعرفة من ط إلى ط بالخاصية "س ضعف ع" هي علاقة في ط.

(2) خواص علاقة في مجموعة

• الإنعكاس

لتكن المجموعة $\text{ل} = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

و \mathcal{R} علاقة معرفة في ل كما يلي :

$$\gamma (س، ع) \Leftrightarrow س \geq ع + 1.$$

لدينا $1+1 \geq 1$ ، $1+2 \geq 2$ ، $1+3 \geq 3$ ، $1+4 \geq 4$ ، $1+5 \geq 5$ أي $\gamma (1، 1)$ ، $\gamma (2، 2)$ ، $\gamma (3، 3)$ ، $\gamma (4، 4)$ ، $\gamma (5، 5)$. وهذا يعني أن كل عنصر من ك مرتبط مع نفسه. نقول عندئذ إن العلاقة γ انعكاسية ومنه :

تعريف

γ علاقة في مجموعة ك .
نقول إن γ انعكاسية إذا وفقط إذا كان كل عنصر من ك مرتبطاً مع نفسه بالعلاقة γ

مثال 1 :

لتكن س هي مجموعة مستقيمات المستوي و γ هي العلاقة :

$$\gamma (ق، ك) \Leftrightarrow (ق) \parallel (ك) .$$

نعلم أن كل مستقيم يوازي نفسه ، فعلاقة التوازي في س "..." انعكاسية .

مثال 2 :

العلاقة γ المعرفة في ح بما يلي :

$$\gamma (س، ع) \Leftrightarrow س > ع \text{ ليست انعكاسية . لأن كل عدد}$$

حقيقي ليس أصغر من نفسه أي : $\forall س \in ح : \gamma (س، س)$ خاطئة .

التناظر .

لتكن المجموعة ك = { أ ، ب ، ج } .

و γ علاقة معرفة في ك ببيانها :

$$\gamma = \{ (أ، ب) ، (ب، أ) ، (أ، ج) ، (ج، أ) ، (ب، ب) ، (ج، ج) \} .$$

لاحظ أن γ هو مجموعة الثنائيات بحيث :

كلما كان (س ، ع) $\in \gamma$ فإن (ع ، س) $\in \gamma$.

نقول عندئذ إن العلاقة γ تناظرية ومنه :

تعريف

γ علاقة في مجموعة ك .
نقول إن γ تناظرية إذا وفقط إذا كان :
 $\forall س \in ك ، \forall ع \in ك : \gamma (س، ع) \Leftrightarrow \gamma (ع، س)$.

مثال 1 :

ح مجموعة الأعداد الحقيقية .

ح هي العلاقة المعرفة في ح كما يلي :

$$\gamma (س ، ع) \Leftrightarrow س = ع .$$

نعلم أن γ س \exists ح ، γ ع \exists ح : (س = ع) \Leftrightarrow (ع = س) .

أي : γ س \exists ح ، γ ع \exists ح : γ (س ، ع) \Leftrightarrow γ (ع ، س) .
فالعلاقة التساوي "...=" تناظرية في ح .

مثال 2 :

لتكن ك مجموعة أفراد أسرة .

• العلاقة γ المعرفة في ك كما يلي : $\gamma (س ، ع) \Leftrightarrow$ س أخ ع .

نعلم أنه إذا كان س أخ ع فإن ع أخ س فالعلاقة γ تناظرية .

• العلاقة γ المعرفة في ك كما يلي : $\gamma (س ، ع) \Leftrightarrow$ س ابن ع

نعلم أنه إذا كان س ابن ع فإن ع ليس ابن س فالعلاقة γ ليست تناظرية .

• ضد التناظر

لتكن المجموعة ك = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } .

و γ علاقة معرفة في ك كما يلي : $\gamma (س ، ع) \Leftrightarrow$ س نصف ع

بيان هذه العلاقة هو ب $\gamma = \{ (1 ، 2) ، (2 ، 1) ، (2 ، 3) ، (3 ، 2) \}$.

لاحظ أن الثنائيات (1 ، 2) ، (2 ، 1) ، (2 ، 3) ، (3 ، 2) هي عناصر من ب γ بينما

الثنائيات (1 ، 2) ، (2 ، 4) ، (3 ، 6) ليست عناصر من ب γ

أي كلما كان (س ، ع) \in ب γ فإن (ع ، س) \notin ب γ نقول عندئذ إن العلاقة γ

ضد تناظرية ومنه :

تعريف :

γ علاقة في مجموعة ك

نقول إن γ ضد تناظرية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

من أجل أي عنصرين مختلفين س و ع من ك فإنه :

إذا كان س مرتبطاً مع ع فلا يكون ع مرتبطاً مع س .

نعبر عن هذا التعريف بالإستلزام التالي :

(γ ضد تناظرية) $\Leftrightarrow [\vee (س، ع) \supset ك]^2 : [\gamma (س، ع) \wedge \gamma (ع، س)] \Leftrightarrow س = ع$
ملاحظة : يمكن أن تكون العلاقة γ علاقة ضد تناظرية و تناظرية في آن واحد.
 فخاصية ضد التناظر ليست نفياً لخاصية التناظر .

مثال 1 :

لتكن المجموعة : $ك = \{ ا ، ب ، ج ، د \}$
 ولتكن γ علاقة معرفة في $ك$ ببيانها :
 $ب \gamma = \{ (ا ، ب) ، (ب ، ج) ، (ا ، د) ، (د ، ب) \}$
 لاحظ أنه من أجل $س$ و $ع$ من $ك$ بحيث $س \neq ع$:
 كلما كان $(س ، ع) \in ب \gamma$ فإن $(ع ، س) \notin ب \gamma$.
 أي كلما كان $س$ مرتبطاً مع $ع$ لا يكون $ع$ مرتبطاً مع $س$. وهذا يعني أن العلاقة γ ضد تناظرية .

مثال 2 :

لتكن المجموعة : $ك = \{ 2 ، 3 ، 4 ، 6 \}$
 ولتكن العلاقة γ_1 المعرفة في $ك$ بمايلي $\gamma_1 (س ، ع) \Leftrightarrow س$ يقسم $ع$.
 تحقق من أن بيان γ_1 هو :

$ب \gamma_1 = \{ (2، 2)، (3، 3)، (4، 4)، (6، 6)، (2، 3)، (3، 4)، (4، 6)، (2، 6) \}$
 لاحظ أنه من أجل أي عنصرين $س$ و $ع$ من $ك$:

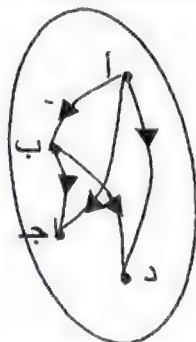
- إذا كان $س \neq ع$ ، فكلما كان $س$ يقسم $ع$ فإن $ع$ لا يقسم $س$.
- مثلاً : 2 يقسم 4 ولكن 4 لا يقسم 2
- 3 يقسم 6 ولكن 6 لا يقسم 3
- 2 يقسم 6 ولكن 6 لا يقسم 2

- إذا كان $س$ يقسم $ع$ و $ع$ يقسم $س$ فإن $س = ع$
- العلاقة γ_2 المعرفة في $ك$ ببيانها : $ب \gamma_2 = \{ (2، 3)، (3، 3)، (3، 2) \}$ ليست ضد تناظرية لأنه توجد في $ب \gamma_2$ ثنائية لا تحقق خاصية ضد التناظر .
- مثلاً : 2 يرتبط مع 3 و 3 يرتبط مع 2 لكن $2 \neq 3$

• التعددي

لتكن المجموعة $ك = \{ ا ، ب ، ج ، د \}$ ولتكن γ علاقة في $ك$ ببيانها هو :

بج = {(أ ، ب)، (ب ، ج)، (أ ، ج)، (ب ، د)، (أ ، د)} التمثيل يبين أنه كلما كان س مرتبطاً مع ع وكان ع مرتبطاً مع ص يكون س مرتبطاً مع ص نقول عندئذ أن ج علاقة متعدية.



ومنه:

تعريف :

ج علاقة في مجموعة ك.
نقول أن ج علاقة متعدية إذا وفقط إذا تحقق مايلي :

$$\forall (س، ع، ص) د ك^3 : [(س، ع) \wedge (ع، ص)] \Rightarrow (س، ص).$$

• مثال 1 :

س هي مجموعة مستقيمات المستوي.

ج هي العلاقة : "....يوازي...." في المجموعة س. نعلم أنه إذا كان (ق)/(ك) و كان (ك)/(ل) فإن (ق)/(ل) فعلاقة التوازي "....//....." في المجموعة س هي علاقة متعدية.

• مثال 2 :

ج هي العلاقة : "....يعامد...." في المجموعة س . نعلم أنه إذا كان (ق) \perp (ك) و كان (ك) \perp (ل) فإن (ق) \perp (ل). إذن علاقة التعامد ".... \perp" في المجموعة س ليست متعدية.

4 . تطبيقات

1 { علاقة التكافؤ في مجموعة

لتكن ج العلاقة المعرفة في ح* كما يلي: $(س، ع) \in ج \Leftrightarrow س \times ع < 0$

لندرس خواص هذه العلاقة:

• هل \neg انعكاسية ؟

(\neg انعكاسية)معناه (\forall س \exists ح : \neg (س، س)) لدينا :

$$\forall$$
 س \exists ح : \neg س \times س = س $<^2$ 0

أي : \forall س \exists ح : \neg (س، س). (حسب تعريف \neg) فالعلاقة \neg انعكاسية.

• هل \neg تناظرية ؟

(\neg تناظرية) معناه [\forall (س، ع) \exists ح : \neg (س، ع) \Leftrightarrow \neg (ع، س)] لدينا:

$$\neg$$
 (س، ع) \Leftrightarrow س \times ع < 0

$$\Leftrightarrow$$
 ع \times س < 0

(الضرب تبديلي في ح)

$$\Leftrightarrow \neg$$
 (ع، س)

(حسب تعريف \neg)

فالعلاقة \neg تناظرية.

• هل \neg متعدية ؟

(\neg متعدية) معناه :

\forall (س، ع، ص) \exists ح : \neg [(س، ع) \wedge \neg (ع، ص) \Leftrightarrow \neg (س، ص)] لدينا :

$$[\neg$$
 (س، ع) \wedge \neg (ع، ص)] \Leftrightarrow [س \times ع $< 0 \wedge$ ع \times ص < 0]

$$\Leftrightarrow$$
 (س \times ع) . (ع \times ص) < 0

$$\Leftrightarrow$$
 (س \times ص) . ع $<^2$ 0

لأن (ع $<^2$ 0)

$$\Leftrightarrow$$
 س \times ص < 0 .

(حسب تعريف \neg)

$$\Leftrightarrow \neg$$
 (س، ص)

فالعلاقة \neg متعدية

هل \neg ضد تناظرية ؟

(\neg ضد تناظرية) معناه :

$$[\forall$$
 (س، ع) \exists ح : \neg (س، ع) \wedge \neg (ع، س) \Leftrightarrow س = ع]

لدينا:

$$[\neg$$
 (س، ع) \wedge \neg (ع، س)] \Leftrightarrow [(س $< 0 \wedge$ ع < 0)]

الاستلزام [(س $< 0 \wedge$ ع < 0) \Rightarrow س = ع] خاطئ لانه توجد ثنائيات من ح² بحيث تكون المقدمة صحيحة والنتيجة خاطئة .

فمثلا : $(0 < 3 \times 2) \wedge (0 < 2 \times 3)$ صحيحة ولكن $3 = 2$ خاطئة .
 فالعلاقة \sim ليست ضد تناظرية .

العلاقة \sim انعكاسية و تناظرية و متعدية .

تسمى كل علاقة إنعكاسية و تناظرية و متعدية في مجموعة علاقة تكافؤ .

• نقول عن كل عددين حقيقيين s, t يحققان العلاقة \sim انهما متكافئان وفق \sim .
 نعلم أن $s \sim t$ معناه $s = t$ و $t \sim s$ و $s \sim s$ لهما نفس الإشارة .

اذن كل عددين موجبين معا أو سالبين معا هما عددان متكافئان وفق \sim .

ف عناصر المجموعة \mathbb{C}^* متكافئة وفق \sim وتسمى صنف تكافؤ وفق \sim .

و عناصر المجموعة \mathbb{C} - متكافئة وفق \sim وتسمى صنف تكافؤ وفق \sim أيضا

(2) علاقة الترتيب في مجموعة

لتكن العلاقة \sim المعرفة في \mathbb{C}^* بما يلي :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^* : a \sim b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^+$$

لندرس خواص \sim .

• الخاصية الانعكاسية

$$(\sim \text{انعكاسية}) \text{ معناه } (\forall a \in \mathbb{C}^* : a \sim a)$$

نعلم أن كل عدد طبعي غير معدوم يقسم نفسه أي : $(\forall a \in \mathbb{C}^* : a \sim a)$
 فالعلاقة \sim انعكاسية .

• الخاصية التناظرية

$$(\sim \text{تناظرية}) \text{ معناه } (\forall (a, b) \in \mathbb{C}^* : a \sim b \Leftrightarrow b \sim a)$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^* : a \sim b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow b \sim a$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{فالاستلزام } (\forall (a, b) \in \mathbb{C}^* : a \sim b \Rightarrow b \sim a) \text{ خاطئ .}$$

فالعلاقة \sim ليست تناظرية .

• خاصية التعدية

(\sim متعدية) معناه :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^* : (a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$$

لدينا :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^* :$$

$$a \sim b \wedge b \sim c \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^+ \wedge \frac{b}{c} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{a}{c} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \sim c$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (ب \text{ مضاعف } أ) \wedge (ج \text{ مضاعف } ب) \\ &\Leftrightarrow (ج \text{ مضاعف } ب) \wedge (ب \text{ مضاعف } أ) \\ &\Leftrightarrow ج \text{ مضاعف } أ \\ &\Leftrightarrow أ \text{ يقسم } ج \Leftrightarrow ج (أ، ج) \end{aligned}$$

فالعلاقة γ متعدية
خاصية ضد التناظر

(γ ضد تناظرية) معناه :

$$\forall (أ، ب) (أ \text{ مضاعف } ب) : \exists (أ، ب) \wedge ج (أ، ب) \Leftrightarrow أ = ب$$

لدينا :

$$\begin{aligned} &\gamma (أ، ب) \wedge \gamma (ب، أ) \Leftrightarrow [(أ \text{ يقسم } ب) \wedge (ب \text{ يقسم } أ)] \\ &\Leftrightarrow (ب \text{ مضاعف } أ) \wedge (أ \text{ مضاعف } ب) \\ &\Leftrightarrow E (ن \text{ ن}) (أ \text{ مضاعف } ب) : (أ \text{ مضاعف } ب) \wedge (ب \text{ مضاعف } أ) \\ &\Leftrightarrow [ن \text{ ن} = ب \wedge (أ \text{ مضاعف } ب)] \wedge [ن \text{ ن} = أ \wedge (ب \text{ مضاعف } أ)] \\ &\Leftrightarrow ن \text{ ن} = أ \\ &\Leftrightarrow ن \text{ ن} = ب \\ &\Leftrightarrow ن \text{ ن} = 1 \end{aligned}$$

$$(لأن ن \text{ مضاعف } أ، ن \text{ مضاعف } ب) \quad 1 = ن \text{ ن} \Leftrightarrow$$

$$اذن (أ = 1 \text{ مضاعف } ب) \wedge (ب = 1 \text{ مضاعف } أ) : أ = ب$$

فالعلاقة γ ضد تناظرية.

العلاقة γ انعكاسية و ضد تناظرية و متعدية.

تسمى كل علاقة انعكاسية و ضد تناظرية و متعدية في آن واحد علاقة ترتيب.

5. تمرين محلول

γ علاقة معرفة في ح كما يلي :

$$\gamma (س، ع) \Leftrightarrow س^2 + 2 = ع^2 + 2$$

1- بين أن γ علاقة تكافؤ.

2- عين صنف تكافؤ العدد 0 (أي مجموعة الأعداد الحقيقية المكافئة للعدد 0).

الحل:

1- لنبين أن γ علاقة تكافؤ .

. الخاصية الانعكاسية

(γ انعكاسية) معناه ($\forall s \exists h : \gamma (s, s)$)

لدينا: $\forall s \exists h : s^2 + 2 = s^2 + 2 = s$

اذن $\gamma (s, s)$

فالعلاقة γ انعكاسية.

. الخاصية التناظرية

(γ تناظرية) معناه ($\forall (s, e) \exists h : \gamma (s, e) \Leftrightarrow \gamma (e, s)$)

لدينا:

$$\gamma (s, e) \Leftrightarrow s^2 + 2 = e^2 + 2 = e$$

$$\Leftrightarrow e^2 + 2 = s^2 + 2 = s$$

$$\Leftrightarrow \gamma (e, s)$$

فالعلاقة γ تناظرية.

. خاصية متعدية

(γ متعدية) معناه :

$$\forall (s, e, v) \exists h^3 : \gamma (s, e) \wedge \gamma (e, v) \Rightarrow \gamma (s, v)$$

لدينا:

$$\gamma (s, e) \wedge \gamma (e, v) \Leftrightarrow [(s^2 + 2 = e^2 + 2) \wedge (e^2 + 2 = v^2 + 2)]$$

$$[(s^2 + 2 = v^2 + 2)]$$

$$\Leftrightarrow [(s^2 + 2 = v^2 + 2)]$$

$$[(s^2 + 2 = v^2 + 2)]$$

$$\Leftrightarrow s^2 + 2 = v^2 + 2 = v$$

$$\Leftrightarrow \gamma (s, v)$$

فالعلاقة γ متعدية.

العلاقة γ انعكاسية و تناظرية و متعدية فهي اذن علاقة تكافؤ.

2- لنعين مجموعة الأعداد الحقيقية المكافئة للعدد 0:

البحث عن مجموعة الأعداد الحقيقية المكافئة للعدد 0 يؤول الى البحث عن الأعداد

س بحيث : $\gamma (s, 0)$

لدينا:

$$\mathcal{C}(s, 0) \Leftrightarrow s + 2 = 0 \times 2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s = -2$$

$$\Leftrightarrow (s = 0) \vee (s = -2)$$

مجموعة الأعداد الحقيقية s بحيث $\mathcal{C}(s, 0)$ هي المجموعة: $\{-2, 0\}$ و تسمى

صنف تكافؤ العدد 0 ، نرمز اليها بالرمز $\bar{0}$

ونكتب: $\bar{0} = \{0, -2\}$

تمارين

1] لتكن المجموعتان:

ق = {1، 2، 3} ، ك = {أ، ب}
 أكتب كلا من المجموعتين : ق × ك و ك × ق

2] لتكن γ علاقة من ق الى ك.

عين ب γ بيان العلاقة γ في كل من الحالات التالية :

- (1) ق = {1، 4، 7} ، ك = {0، 1، 5} ؛ γ (س، ع) \Leftrightarrow س > ع + 3
- (2) ق = {1، 4، 7} ، ك = {0، 1، 5} ؛ γ (س، ع) \Leftrightarrow س + ع ≥ 6
- (3) ق = {2، 4، 6} ، ك = {3، 7، 9} ؛ γ (س، ع) \Leftrightarrow 1 ≥ س - ع > 3
- (4) ق = {4، 9، 10} ، ك = {2، 3، 5} ؛ γ (س، ع) \Leftrightarrow س = ع²

3] لتكن المجموعة ق = {1، 2، 3، 4،، 15}.

نعرف في كل من الحالات التالية علاقة في ق كمايلي.

γ_1 (س، ع) \Leftrightarrow س هو نصف ع.

γ_2 (س، ع) \Leftrightarrow س يقسم ع

γ_3 (س، ع) \Leftrightarrow س مربع ع

γ_4 (س، ع) \Leftrightarrow س ضعف ع

γ_5 (س، ع) \Leftrightarrow س مضاعف ع

γ_6 (س، ع) \Leftrightarrow س هو الجذر التربيعي للعدد ع .

عين عناصر كل من: γ_1 ، γ_2 ، γ_3 ، γ_4 ، γ_5 ، γ_6

4] لتكن المجموعتان ق = {أ، ب} ، ك = {3، 5، 7، 9}

γ علاقة معرفة من ق الى ك ببيانها :

$\gamma = \{(أ، 3)، (أ، 7)، (ب، 5)، (ب، 7)، (ب، 9)\}$

مثل ب γ سهميا و بيانيا.

5] γ و γ' علاقتان معرفتان كمايلي :

γ : ط ← ط

س ← ع - 5

γ : ح ← ح

س ← ع = 5 - س

(1) مثل بيانيا كلا من العلاقتين γ و γ' في مستو منسوب الى معلم

(2) بفرض (γ) تمثيل العلاقة γ و (λ) تمثيل العلاقة γ ، بين أن $(\gamma) \supset (\lambda)$ 6 ق مجموعة ، γ علاقة معرفة في ق .

عين بذكر العناصر ببيان العلاقة γ في كل من الحالات التالية :

$$(1) \text{ ق} = \{1, 2, 3, 4, 6\} \text{ و } \gamma (س، ع) \Leftrightarrow \text{س ضعف ع}$$

$$(2) \text{ ق} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ و } \gamma (س، ع) \Leftrightarrow \text{س جنره ع}$$

$$(3) \text{ ق} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ و } \gamma (س، ع) \Leftrightarrow \text{س} \neq \text{ع}$$

$$(4) \text{ ق} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ و } \gamma (س، ع) \Leftrightarrow \text{س} = \text{ع}$$

مثل سهميا كلا من هذه العلاقات .

7 لتكن المجموعة ق $\{أ، ب، ج، د\}$ و العلاقة γ المعرفة في ق ببيانها

$$\gamma = \{(أ، أ)، (ب، ب)، (ج، ج)، (أ، ب)، (ب، أ)\}$$

هل هذه العلاقة : انعكاسية ؟ تناظرية ؟ متعدية ؟

8 ادرس خواص العلاقة γ المعرفة في المجموعة ق في كل من الحالات التالية

$$(1) \text{ ق} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ و } \gamma (س، ع) \Leftrightarrow \text{س} + 3 = \text{ع}$$

$$(2) \text{ ق} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ و } \gamma (س، ع) \Leftrightarrow \text{س} \leq \text{ع}^2$$

$$(3) \text{ ق} = \{1, 2, 4\} \text{ و } \gamma (س، ع) \Leftrightarrow \text{س} \geq \text{ع}^2$$

$$(4) \text{ ق} = \{1, 2, 3\} \text{ و } \gamma (س، ع) \Leftrightarrow \text{س} + \text{ع} \leq 2$$

$$(5) \text{ ق} = \{1, 2, 3\} \text{ و } \gamma (س، ع) \Leftrightarrow \text{س} = \text{ع} \geq \text{س}$$

$$(9) \text{ لتكن المجموعتان : ق} = \{0, 1\} \text{ و ك} = \{0, 1, 2\}$$

γ علاقة معرفة في كل من ق و ك كما يلي :

$$\gamma (س، ع) \Leftrightarrow \text{س} = \text{ع}^2$$

بين أن γ انعكاسية في ق و غير انعكاسية في ك .

10 $\gamma_1، \gamma_2، \gamma_3$ علاقات معرفة في ح كما يلي :

$$(1) \gamma_1 (س، ع) \Leftrightarrow \text{س} \geq \text{ع}$$

$$(2) \gamma_2 (س، ع) \Leftrightarrow 3\text{س} + 2\text{ع} = 2 + \text{ع}^2$$

$$(3) \gamma_3 (س، ع) \Leftrightarrow \text{س} = 2\text{ع}$$

أدرس الانعكاس و التناظر و ضد التناظر و التعددي لكل علاقة من هذه العلاقات .

11] لتكن S مجموعة مستقيمات المستوى ولتكن R علاقة معرفة في S كالآتي :

$$R = \{ (q, q) \mid q \perp (q) \}$$

هل R انعكاسية ؟ هل هي تناظرية ؟ هل هي ضد تناظرية ؟ هل هي متعدية ؟

هل R علاقة تكافؤ ؟ هل R علاقة ترتيب ؟

12] نفس التمرين السابق بالنسبة إلى كل من العلاقتين R_1 و R_2 المعرفتين في S

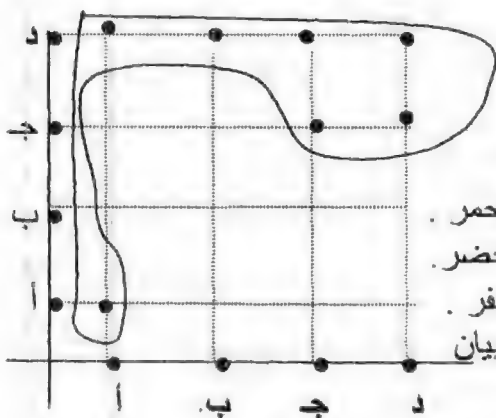
$$R_1 = \{ (q, q) \mid q \parallel (q) \}$$

$$R_2 = \{ (q, q) \mid q \text{ يقطع } (q) \}$$

13 - لتكن (γ) مجموعة دوائر المستوى و العلاقة :

$$R = \{ (d_1, d_2) \mid d_1 \text{ لها نفس مركز } d_2 \}$$

14] R علاقة معرفة في المجموعة $\{a, b, c, d\}$ بتمثيلها البياني التالي :



(1) هل R انعكاسية ؟

(2) هل R تناظرية ؟

(4) هل R متعدية ؟

• أتم هذا التمثيل لكي تصبح :

- R انعكاسية : علم النقاط المضافة بالأحمر .

- R تناظرية : علم النقاط المضافة بالأخضر .

- R متعدية : علم النقاط المضافة بالأصفر .

ما هي الثنائيات التي يجب أن تضاف إلى بيان

العلاقة R لكي تصبح علاقة تكافؤ ؟

15] M من نصف مستقيم مبدؤه M . R علاقة معرفة في M كما يلي :

نقول إن النقطة A من M مرتبطة بالنقطة B من M إذا و فقط إذا كان

$A \leq B$. بين أن R علاقة ترتيب .

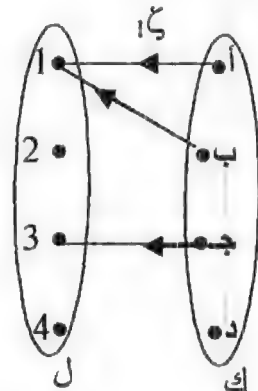
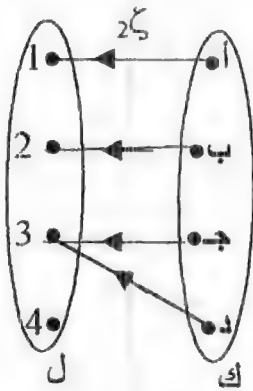
16] Q مجموعة تلاميذ قسمك .

نقول أن لتلميذين نفس السن إذا ولدا في السنة نفسها . بين أن العلاقة المعرفة

في Q بالخاصية :

" s له على الأقل نفس سن t " هي علاقة ترتيب .

١ و ٢ علاقـتان من ك الى ل معرفتان بتمثيليـهما السهميين التاليين :

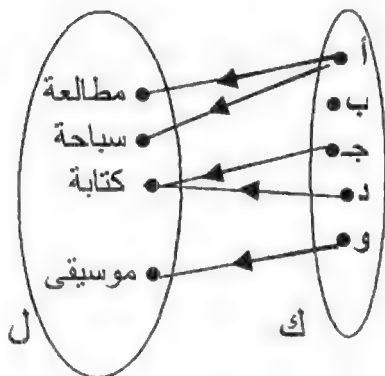


- لاحظ أن كل عنصر من ك ينطلق منه سهم واحد فقط .
- العلاقة f تسمى تطبيقاً للمجموعة ك في المجموعة ل .
- $f(أ) = 1$ ، $f(ب) = 2$ ،
- $f(ج) = 3$ ، $f(د) = 3$.
- العنصر 4 من ل له سابقة من ك .

- لاحظ أن كل عنصر من ك ينطلق منه سهم واحد على الأكثر .
- العلاقة g تسمى دالة من المجموعة ك إلى المجموعة ل .
- العنصر 1 من ل هو صورة كل من العنصرين أ و ب من ك .
- كل من أ و ب هو سابقة للعنصر 1 .
- العنصر 3 هو صورة جـ من ك .
- العنصر د من ك ليس له صورة
- نكتب : $g(أ) = g(ب) = 1$.
- $g(ج) = g(د) = 3$.

نشاط 2 .

ك مجموعة أشخاص ، ل مجموعة هوايات .
علاقة من ك إلى ل معرفة بمخططها السهمي التالي :



ع ليست دالة وليست تطبيقاً

لماذا..؟

1. الدالة

1) تعريف :

ك ، ل مجموعتان
نسمي دالة من ك إلى ل كل علاقة ترفق كل عنصر من ك بعنصر واحد على الأكثر من ل .

نرمز إلى دالة برمز مثل \hookrightarrow ، \mapsto ، \rightarrow ..
نرمز إلى كل دالة α من ك إلى ل كما يلي :

$\alpha : ك \rightarrow ل$

$\alpha : ك \rightarrow ل$ (س)

• ك تسمى مجموعة بدء الدالة

• ل تسمى مجموعة وصول الدالة α

• العنصر α يسمى صورة العنصر س بالدالة α

و نكتب : $\alpha = \alpha(س)$

ونقرأ : α يساوي " $\alpha(س)$ "

• الكتابة $\alpha : ك \rightarrow ل$ = $\alpha(س)$: س صورته α أو س صورته $\alpha(س)$

مثال 1 :

ك مجموعة أشخاص ، ل مجموعة مدن . γ العلاقة من ك الى ل المعرفة بالجملة المفتوحة : "س ولد في ع"
 γ هي دالة من ك الى ل لأن كل شخص من المجموعة ك ولد في مدينة واحدة على الأكثر من المجموعة ل .

مثال 2

العلاقة γ المعرفة كما يلي

γ : ص \leftarrow ط

γ (س، ع) \Leftrightarrow س = ع²

هي دالة من ص إلى ط لأنه إما أن يكون العدد الصحيح س مربعاً لعدد طبيعي ع مثل العدد الطبيعي 9 وعندئذ يكون γ (س، ع) و إما أن لا يكون مربعاً لأي عدد طبيعي مثل - 2 فلا يرتبط بأي عنصر من ط .

مثال 3

العلاقة γ المعرفة كما يلي :

γ : ط \leftarrow ص

γ (س، ع) \Leftrightarrow س = ع² ليست دالة لأن : $9 = (3)^2$ و $9 = (-3)^2$ فالعلاقة γ تربط العدد الطبيعي 9 بأكثر من عنصر .

(2) مجموعة تعريف دالة :

لتكن الدالة تا : ك \leftarrow ل

س \leftarrow ع = تا(س) .

مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة العناصر س من ك التي لها صور من ل بالدالة تا

نسمي مجموعة قيم الدالة تا مجموعة العناصر ع من ل التي هي صور بالدالة تا لعناصر من ك

مثال :

تا دالة معرفة كما يلي :

تا : ح \leftarrow ح

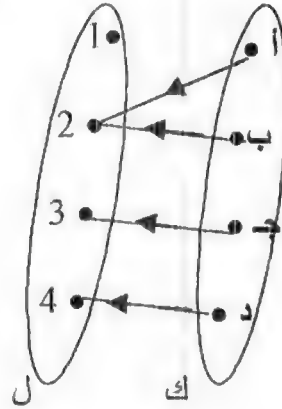
س \leftarrow تا(س) = $\sqrt{1-s}$

نعلم أنه لا يوجد جذر تربيعي لعدد حقيقي سالب . إذن تكون الدالة تا معرفة إذا كان س - 1 \leq 0 أي س \leq 1 و منه .

فـ = { س : س \in ح \wedge س \leq 1 } أي فـ =] - ∞ ، 1]

2. التطبيق

ليكن التمثيل السهمي الآتي لعلاقة γ من K إلى L . لاحظ أن كل عنصر من K له صورة واحدة فقط من L بالعلاقة γ .
هذه العلاقة هي دالة من K إلى L مجموعة تعريفها هي المجموعة K .
تسمى هذه العلاقة تطبيقاً للمجموعة K في المجموعة L .



K ، L مجموعتان .
نسمي تطبيقاً للمجموعة K في المجموعة L كل علاقة ترفق كل عنصر من K بعنصر واحد فقط من L .

نرمز للتطبيق برمز مثل : γ ، δ ، ϵ ،
ملاحظة :

كل تطبيق للمجموعة K في المجموعة L هو دالة مجموعة تعريفها هي K .
نرمز للتطبيق γ للمجموعة K في L كما يلي
تا . $K \rightarrow L$

γ = γ (س) .

ونقرأ γ صورته γ أو γ صورته γ (س) .

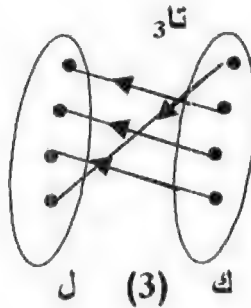
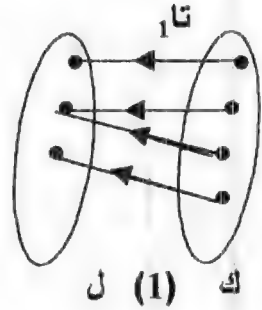
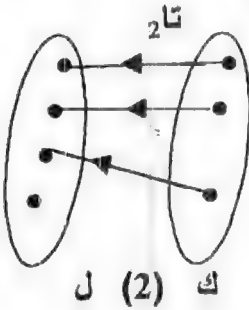
مثال : تا وها دالتان معرفتان كما يلي :

$$\begin{aligned} \text{تا : } \mathcal{H} &\longleftarrow \mathcal{H} & \text{ها : } [1, +\infty[&\longleftarrow \mathcal{H} \\ \mathcal{H} &\longleftarrow \mathcal{H} & \mathcal{H} &\longleftarrow \mathcal{H} \\ \sqrt{1-s} &= (s) & \sqrt{1-s} &= (s) \end{aligned}$$

- الدالة تا ليست تطبيقا لأن $\mathcal{H} = [1, +\infty[$ أي أن $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}$
- الدالة ها هي تطبيق لأن \mathcal{H} هي مجموعة البدء . $\mathcal{H} = [1, +\infty[$

أنواع التطبيقات

لتكن تا₁ ، تا₂ ، تا₃ ثلاث تطبيقات للمجموعة ك في ل ممثلة سهميا كما يلي :



لاحظ أن :

- كل عنصر من ك ينطلق منه سهم واحد فقط . أي كل عنصر من ك له صورة واحدة من ل .
- لكن وصول السهام يختلف من تطبيق إلى آخر .
- فأوضاع الصور تميز هذه التطبيقات عن بعضها .

لندرس حالات صور هذه التطبيقات .

- في (1) كل عنصر من L يصله سهم واحد على الأقل، أي كل عنصر من L هو صورة لعنصر واحد على الأقل من K .
- التطبيق τ_1 يسمى تطبيقا غامرا أو يسمى غمرا إذن :

(τ_1 غمر للمجموعة K في المجموعة L) معناه :

$$(\forall x \in L , \exists y \in K : x = \tau_1(y))$$

- في (2) كل عنصر من L يصله سهم واحد على الأكثر ، أي كل عنصر من L هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من K . هذا يعني أن لعنصرين مختلفين من K صورتين مختلفتين من L :
- يسمى التطبيق τ_2 تطبيقا متباينا ، أو يسمى متباينا . إذن :

(τ_2 متباين) معناه :

$$(x_1 \neq x_2 \Rightarrow \tau_2(x_1) \neq \tau_2(x_2))$$

وبأخذ العكس النقيض للاستلزام السابق يكون :

(τ_2 متباين) معناه : $(\tau_2(x_1) = \tau_2(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

- في (3) كل عنصر من L يصله سهم واحد فقط ، أي كل عنصر من L هو صورة لعنصر واحد من K .
- يسمى التطبيق τ_3 تطبيقا تقابليا أو يسمى تقابلا إذن :

(τ_3 تقابل) معناه :

$$(\forall x \in L , \exists ! y \in K : x = \tau_3(y))$$

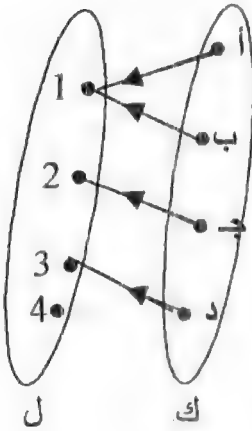
(الكتاب IE س DK) تبين أنه يوجد عنصر وحيد s من المجموعة K .
ملاحظة :

كل تقابل هو تطبيق متباين و غامر في آن واحد .

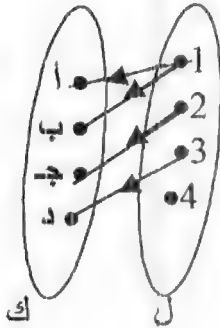
4 . تطبيقات

1) العلاقة العكسية لتطبيق

تأ تطبيق للمجموعة ك في المجموعة ل ممثل سهميا كما في الشكل :



التمثيل السهمي للعلاقة العكسية تأ⁻¹ يكون كالتالي :



لاحظ أن العنصر 1 له صورتان والعنصر 4 ليس له صورة . فالعلاقة تأ⁻¹ ليست تطبيقا .

بصورة عامة :

العلاقة العكسية لتطبيق ليست دائما تطبيقا .

نقبل الخاصية :
تكون العلاقة العكسية لتطبيق τ تطبيقا إذا و فقط إذا كان τ تقابليا .

(2) تعيين التطبيق العكسي لتقابل

مثال 1 :

ك، ل مجموعتان حيث :

$$ك = \{0, 1, 2, 5\} ; ل = \{2, 3, 4, 5\} .$$

τ هو التطبيق المعروف كما يلي :

$\tau : ك \longrightarrow ل$

$$س \longleftarrow ع = س + 2$$

. لنتحقق أن τ تقابل .

لدينا : $\tau(س) = س + 2$

$$\text{إذن : } \tau(0) = 2 = 2 + 0$$

$$\tau(1) = 3 = 2 + 1$$

$$\tau(2) = 4 = 2 + 2$$

$$\tau(5) = 7 = 2 + 5$$

لاحظ أن لكل عنصر من المجموعة ل سابقة وحيدة من ك ، هذا يعني أن τ تقابل . فهو يقبل تطبيقا عكسيا τ^{-1} .

. لنبحث عن τ^{-1}

التطبيق τ يرفق كل عنصر س من ك بعنصر ع من ل وفق الخاصية

$$ع = س + 2 \text{ التي تعبر عن ع بدلالة س .}$$

فالتطبيق τ^{-1} يرفق كل عنصر ع من ل بعنصر س من ك ، وفق خاصية تعبر

عن س بدلالة ع . لنبحث عن هذه الخاصية :

لدينا :

$$ع = س + 2 \Leftrightarrow س = ع - 2$$

إذن يعرف التطبيق τ^{-1} كالتالي :

$$\tau^{-1} : ل \longrightarrow ك$$

$$ع \longleftarrow س = ع - 2$$

ونكتب $\tau^{-1}(ع) = س$

لدينا أيضا : $\tau(س) = ع$. وبصفة عامة لدينا التكافؤ التالي :

$$\tau(س) = ع \Leftrightarrow \tau^{-1}(ع) = س$$

ها تطبيق معرف كما يلي :

ها : ح* \longleftarrow ح - { 2 }

$$س \longleftarrow ع = \frac{1 - س}{س}$$

• لنبين أن ها تقابل .

يكون هاتقابلة إذا و فقط إذا كان لكل عنصر ع من مجموعة الوصول

ح - { 2 } سابقة وحيدة س من ح* هذا معناه :

$$\forall ع \in ح - { 2 } , IE س \in ح* بحيث : ها (س) = ع .$$

$$ها (س) = ع \Leftrightarrow ع = \frac{1 - س}{س}$$

$$(س \in ح*) \quad \Leftrightarrow ع = 1 - س$$

$$\Leftrightarrow ع - س = 1$$

$$\Leftrightarrow ع - 2 = س$$

$$(ع \neq 2) \quad \Leftrightarrow س = \frac{1}{ع - 2}$$

فالعدد الحقيقي $\frac{1}{ع - 2}$ أي العدد س وحيد من أجل كل عدد ع يختلف عن 2 .

فكل عدد ع من ح - { 2 } له سابقة وحيدة من ح* .

إذن ها تقابل و بالتالي يقبل تطبيقا عكسيا ها¹

لنعين ها¹ :

تعيين ها¹ يؤول إلى التعبير عن س بدلالة ع .

لدينا :

$$(نتيجة سابقة) \quad ع = \frac{1 - س}{س} \Leftrightarrow س = \frac{1}{ع - 2}$$

ها¹ : ح - { 2 } \longleftarrow ح*

$$ع \longleftarrow س = \frac{1}{ع - 2}$$

$$\text{نكتب : ها}^1 (ع) = \frac{1}{ع - 2}$$

• نرمز عادة إلى المتغير بالرمز س ، فكل عنصر س من المجموعة ح - { 2 }

$$\text{له صورة واحدة وفق ها}^1 \text{ من المجموعة ح}^* \text{ هي } \frac{1}{س - 2}$$

$$\text{و نكتب : ها}^1 (س) = \frac{1}{س - 2}$$

5. تمارين محلولة

تمرين 1 :

تا و ها دالتان معرفتان في ح كما يلي :

$$\begin{aligned} \text{تا : ح} &\longleftarrow \text{ح} , \quad \text{ها : ح} \longleftarrow \text{ح} \\ \text{س} &\longleftarrow \text{تا (س)} = \text{س}^2 - 4 \quad \text{س} \longleftarrow \text{ها (س)} = \frac{2}{1-\text{س}} \end{aligned}$$

- 1- عيّن كلا من فئ ، فها ، مجموعة تي تعريف تا و ها .
- 2- احسب ، إن أمكن : تا ($\sqrt[3]{-1}$) ؛ ها (-1) ؛ ها (1).
- 3- هل الدالة تا تطبق ؟ هل الدالة ها تطبق ؟

الحل :

• تعيين فئ :

لدينا : تا (س) = $\text{س}^2 - 4$ تتضمن عمليتين (تربيع و طرح) يمكن إنجازهما مهما كانت قيمة المتغير س من ح .

نقول إن الدالة تا معرفة في ح و نكتب : فئ = ح

• تعيين فها :

$$\text{لدينا : ها (س)} = \frac{2}{1-\text{س}}$$

لاحظ أن العبارة $\frac{2}{1-\text{س}}$ تتضمن عمليتين (طرح ثم قسمة) الطرح يمكن إجراؤه

مهما كان س من ح و لكن قسمة 2 على س - 1 لا يمكن إنجازها من أجل

س - 1 = 0 أي س = 1 إذن الدالة ها معرفة في المجموعة ح - {1} .

لاحظ أن : مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة بدءها ح .
إذن تا تطبق .

لكن مجموعة تعريف الدالة ها هي جزء من مجموعة بدءها إذن ها ليست تطبقا .

تا تطبيق معرف كما يلي :

تا: $ح \leftarrow ح$

س $\leftarrow ع = 2س + 3$

بين أن تا يقبل تطبيقا عكسيا تا⁻¹

استنتج عبارة تا⁻¹ (ع) .

الحل :

يقبل تا تطبيقا عكسيا إذا كان تا تقابلا .

فلنبين أن تا تقابل .

تا تقابل معناه (المعادلة تا (س) = ع ذات المجهول س تقبل حلا وحيدا في ح)

لدينا : $ع = 2س + 3 \Leftrightarrow 2س = ع - 3$

$$\Leftrightarrow س = \frac{ع - 3}{2}$$

فمن أجل كل قيمة للعنصر ع من ح نحصل على قيمة وحيدة للعنصر س .

إذن المعادلة $ع = 2س + 3$ تقبل حلا وحيدا في ح هو :

$$س = \frac{ع - 3}{2}$$

وبالتالي تا تقابل .

إذن تا يقبل تطبيقا عكسيا تا⁻¹ معرفا كما يلي :

تا⁻¹ : $ح \leftarrow ح$

$$ع \leftarrow س = \frac{ع - 3}{2}$$

1 [1] ثا دالة معرفة كما يلي :

$$\begin{aligned} \text{ثا : } & \text{ح} \longleftarrow \text{ح} \\ & \text{س} \longleftarrow \text{ثا (س)} = 3 \text{ س} \end{aligned}$$

- احسب كلا من : ثا (2) ؛ ثا (3) ؛ ثا (0) ؛ ثا (1) ؛ ثا $(-\frac{1}{2})$

ثا $(\sqrt{2})$.

- س ، ص ، هـ أعداد حقيقية .

اكتب عبارة كل من ثا (ص) ؛ ثا (س^2) ؛ ثا $(\text{س} + \text{هـ})$ ؛ ثا $(-\text{س})$ ؛ ثا $(2\text{س} + 3)$.

2 [2] نفس التمرين لكل من الدوال .

$$1 \text{ (س)} \longleftarrow 5 \text{ س} - 1$$

$$2 \text{ (س)} \longleftarrow \frac{5}{\text{س}}$$

$$3 \text{ (س)} \longleftarrow 5 \text{ س}^2 - 3 \text{ س} + 4$$

$$4 \text{ (س)} \longleftarrow (\text{س} - 2)(2\text{س} + 3)$$

$$5 \text{ (س)} \longleftarrow \frac{3 + \text{س}}{2 - \text{س}}$$

$$6 \text{ (س)} \longleftarrow \sqrt{1 - \text{س}^2}$$

3 [3] عين مجموعة التعريف لكل من الدوال الاتية من ح إلى ح

$$1 \text{ (س)} \longleftarrow \text{س}^2 - 3 \text{ س} + 7$$

$$2 \text{ (س)} \longleftarrow 1 - 2 \text{ س} + \frac{\text{س}}{5}$$

$$3 \text{ (س)} \longleftarrow (\text{س} - 3) \cdot (2\text{س} - 5)$$

$$(4) \text{ س } \longleftarrow \frac{5}{\text{س}}$$

$$(5) \text{ س } \longleftarrow \frac{3\text{س} - 6}{1 - \text{س}}$$

$$(6) \text{ س } \longleftarrow \frac{5\text{س} - 1}{1 - \text{س}^2}$$

$$(7) \text{ س } \longleftarrow \frac{5\text{س} - 1}{1 + \text{س}^2}$$

$$(8) \text{ س } \longleftarrow \frac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\text{س}^2 - 2 + 1}$$

$$(9) \text{ س } \longleftarrow \sqrt{4 - \text{س}} \quad ; \quad (10) \text{ س } \longleftarrow \sqrt{\text{س}^2 - 2}$$

$$(11) \text{ س } \longleftarrow \sqrt{\text{س}} + \sqrt{2 - \text{س}} \quad ; \quad (12) \text{ س } \longleftarrow \sqrt{2 - \text{س}} + \sqrt{5 - \text{س}}$$

التطبيقات .

4 لتكن المجموعتان :

$$\{ 7, 6, 5, 4, 3 \} = \text{ق}$$

$$\{ \text{عبد الرحمن ؛ أحمد ؛ إبراهيم ؛ عمر ؛ مصطفى} \} = \text{ك}$$

علاقة معرفة من ق إلى ك كما يلي :

$$\text{ع} (\text{س} , \text{ع}) \Leftrightarrow \text{س} \text{ هو عدد حروف ع}$$

(1) هل ع تطبيق ؟

(2) عین بیان هذه العلاقة و مثلها سهميا و بيانيا .

5 لتكن : م = { 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، } مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية

$$\text{و } م = \{ 0 ، 3 ، 6 ، 9 ، \} \text{ مجموعة مضاعفات العدد 3 .}$$

علاقة من م إلى م معرفة كما يلي :

$$\text{ع} (\text{س} , \text{ع}) \Leftrightarrow \text{ع} = 3\text{س}$$

(1) تحقق أن ع تطبيق من م إلى م

(2) هل هذا التطبيق تقابلي ؟

6 لتكن المجموعتان :

$$Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ و } K = \{0, 1, 2\}$$

علاقة من ق إلى ك معرفة كما يلي :

$$(s, e) \Leftrightarrow e \text{ هو باقي قسمة } s \text{ على } 3$$

(1) بين أن ع تطبيق

(2) هل هذا التطبيق متباين ؟

7 لتكن المجموعة ق حيث

$$Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

(أ) علاقة معرفة في ق كما يلي :

$$(s, e) \Leftrightarrow e = \frac{2s + 1}{3}$$

- بين أن ع₁ تطبيق ؟

- هل هذا التطبيق متباين ؟ هل هو غامر ؟

(ب) ع₂ علاقة معرفة في ق كما يلي :

$$(s, e) \Leftrightarrow e = \frac{7s - s^2}{2}$$

- بين أن ع₂ تطبيق

- هل هذا التطبيق غامر ؟

8 لتكن المجموعتان :

$$Q = \{a, b, c, d, e\} ; K = \{2, 3, 5, 9\}$$

علاقة من ق إلى ك معرفة ببيانها :

$$b \text{ ع } a = \{(a, 2), (b, 3), (c, 2), (d, 5), (e, 9)\}$$

(1) بين أن ع تطبيق

(2) هل ع متباين ؟ هل ع غامر ؟

9 تا تطبيق معرف كما يلي :

$$s \mapsto 2s$$

$$s \mapsto e = 2 + s$$

بين أن تا متباين .

هل التطبيق تا غامر ؟ هل هو تقابلي ؟

10] تا تطبيق معرف كما يلي :

$$\text{تا : ح} \longleftarrow \text{ح}^+$$

$$\text{س} \longleftarrow \text{ع} = \text{ص}$$

- تحقق أن تا متباين ؟ هل تا غامر ؟

11]

$$\text{تا}_1 : \text{ص} \longleftarrow \text{ص} ; \text{تا}_2 : \text{ص} \longleftarrow \text{ص} ; \text{تا}_3 : \text{ص} \longleftarrow \text{ص}$$

$$\text{س} \longleftarrow \text{ع} = \text{س} + 1 ; \text{س} \longleftarrow \text{س} + 5 ; \text{س} \longleftarrow \text{ع} = \text{س}^2$$

1) هل التطبيقات تا₁ ، تا₂ ، تا₃ متباينة ؟ هل هي غامرة ؟

2) أوجد عبارة التطبيق العكسي لكل من هذه التطبيقات إن وجد .

12] تا تطبيق للمجموعة ح في ح معرف كما يلي :

$$\text{تا : ح} \longleftarrow \text{ح}$$

$$\text{س} \longleftarrow \text{تا (س)} = 1 - \text{س}^2$$

بين أن تا غير متباين .

ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية .

ليكن تا₁ و تا₂ تطبيقان للمجموعة ط² في ط معرفان كما يلي :

$$\text{تا}_1 : \text{ط} \times \text{ط} \longleftarrow \text{ط} ; \text{تا}_2 : \text{ط} \times \text{ط} \longleftarrow \text{ط}$$

$$(\text{س} , \text{ع}) \longleftarrow \text{س} + \text{ع} ; (\text{س} , \text{ع}) \longleftarrow \text{س} \times \text{ع}$$

بين أن تا₁ متباين و أن تا₂ غامر .

ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية .

ليكن تا₁ و تا₂ تطبيقان للمجموعة ح في ح معرفان كما يلي :

$$\text{تا}_1 : \text{ح} \longleftarrow \text{ح} ; \text{تا}_2 : \text{ح} \longleftarrow \text{ح}$$

$$\text{س} \longleftarrow \text{ع} = 2\text{س} + 1 ; \text{س} \longleftarrow \text{ع} = \frac{1 + \text{س}}{\text{س}}$$

بين أن تا₁ غامر و أن تا₂ غير غامر .

15] تا تطبيق للمجموعة ص في ص معرف كما يلي :

$$\text{تا : ص} \longleftarrow \text{ص}^+$$

$$\text{س} \longleftarrow \text{ع} = \text{س}^2 . \text{بين أن تا ليس متباينا و ليس غامرا .}$$

تا تطبيق معرف كما يلي :

$$\text{تا : ح} - \{5\} \longleftarrow \text{ح} - \{2\} . \text{س} \longleftarrow \text{ع} = \frac{1 + 2\text{س}}{5 - \text{س}}$$

1) بين أن تا متباين و غامر . 2) عيّن التطبيق العكسي تا⁻¹ .

التمرين

وحيد الحد لمتغير حقيقي س

تا و ها دالتان من ح إلى ح معرفتان كما يلي :

تا : ح ← ح ها : ح ← ح

$$س ← س = \frac{1}{2}س \quad س ← ها(س) = س - 5س^2$$

(1) احسب كلا من الأعداد الحقيقية :

تا(0) ؛ تا(-1) ؛ تا(2V+1) .

ها(0) ؛ ها(-1/2) ؛ ها(3V-1)

(2) ما هي العمليات الواردة في كل من العبارتين الجبريتين $\frac{1}{2}س$ و $س - 5س^2$ ؟

• تحقق أن كلا من هاتين العبارتين هي من الشكل :

أس^ن حيث : أ و ح ، ن و ط و س متغير حقيقي.

الدالة تا التي ترفق كل عدد حقيقي س بالعدد الحقيقي أس^ن تسمى دالة وحيد الحد للمتغير الحقيقي س.

كل عدد حقيقي من الشكل أس^ن يسمى وحيد الحد للمتغير الحقيقي س

- العدد الحقيقي أس^ن يسمى معامل وحيد الحد أس^ن.

- إذا كان $أ \neq 0$ فالعدد الطبيعي ن يسمى درجة وحيد الحد أس^ن.

- إذا كان $أ = 0$ فالعدد 0 هو وحيد الحد المعلوم 0

- كل من $\frac{1}{س}$ و $2س$ ليس وحيد حد لماذا ؟

• العملية الوحيدة الواردة في أي وحيد حد هي الضرب في ح.

• نشاط 2 : وحيد الحد لمتغيرين حقيقيين س و ع :

تا دالة معرفة من ح² إلى ح كما يلي :

تا : ح² ← ح ، (س، ع) ← تا(س، ع) = 3س ع²

(1) احسب كلا من: تا (1، 2) ؛ تا (0، -3)

(2) ما هي العمليات الواردة في العبارة الجبرية $3س ع^2$ ؟

• تحقق أن العبارة الجبرية $3س ع^2$ هي من الشكل $أس ن ع^م$

• الدالة التي ترفق كل ثنائية (س، ع) من $ح^2$ بالعدد الحقيقي $أس ن ع^م$ تسمى دالة وحيد حد للمتغيرين س و ع.

• العدد الحقيقي $أس ن ع^م$ يسمى وحيد حد للمتغيرين س و ع.

- العدد الحقيقي أ يسمى معامل وحيد الحد $أس ن ع^م$

- إذا كان $أ \neq 0$ فالعدد الطبيعي ن يسمى درجة وحيد الحد $أس ن ع^م$ بالنسبة للمتغير س

و العدد الطبيعي ه يسمى درجة وحيد الحد $أس ن ع^م$ بالنسبة للمتغير ع

العدد (ن+هـ) يسمى درجة وحيد الحد $أس ن ع^م$ بالنسبة للمتغيرين س و ع.

نشاط 3 : وحيدات الحد المتشابهة .

لتكن وحيدات الحد الآتية:

تا (س) = $2س^3$ ؛ ها (س) = $(1 - 2ص)س^4$ ؛ حا (س) = $5ص^3س^3$

- ما هو معامل و درجة كل من وحيدات الحد هذه ؟

- ما هي وحيدات الحد التي لها نفس الدرجة ؟

- نقول عن وحيد حـ للمتغير س إنهما متشابهان إذا كان لهما نفس الدرجة.

مثلاً : - س² و $\frac{1}{4}س^2$ متشابهان

- س² و $\frac{1}{4}س^3$ غير متشابهين

نشاط 4 : تبسيط كتابة وحيد حد

- بما أن كل وحيد حد هو عدد حقيقي ، فإن قواعد الحساب في ح تبقى صالحة.

- اكتب على الشكل المبسط $أس ن ع^م$ أو $أس ن ع^م$ كلا مما يلي:

$$(1) 2س^2 + 3س^2 \quad ؛ \quad (2) -5س^3 + \frac{1}{2}س^3$$

$$(3) \left(\frac{1}{2}س^4\right) \cdot (2ص^4س) \quad ؛ \quad (4) 2\left(\frac{2ص^3}{2}س^3\right)$$

$$(5) -س ع + 3س ع \quad ؛ \quad (6) \frac{1}{4}س^2 ع^2 + \frac{2ص^2}{4}س^2 ع^2$$

$$(7) \left(\frac{1}{4} \text{س}^2 \text{ع}^3 \right) \cdot (4 \text{س}^2 \text{ع})$$

هل يمكن تبسيط المجموع الجبري: $2\text{س}^3 + 4\text{س}^2$ ؟ لماذا ؟
نشاط 5 : مجموع وحيدات حد غير متشابهة
 لتكن المجاميع الجبرية التالية:

$$\text{تا (س)} = \frac{1}{2} \text{س}^2 + 2\text{س}^2$$

$$\text{ها (س)} = \text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 1$$

$$\text{حا (س)} = \text{س}^4 - \text{س}^3$$

- تا (س) هو وحيد حد. لماذا ؟

- كل من ها (س) و حا (س) ليس وحيد حد. لماذا ؟

- مجموع وحيدات حد متشابهة هو وحيد حد.

- مجموع وحيدات حد غير متشابهة ليس وحيد حد ، فهو كثير حدود
 مثلا: كل من ها (س) و حا (س) هو كثير حدود .

2. كثيرات الحدود

1) تعاريف

• تعريف :

كثير الحدود للمتغير الحقيقي س هو مجموع وحيدات حد للمتغير س . ليست كلها متشابهة .

نرمز إلى كثير الحدود للمتغير س برمز مثل :

تا (س) ، ك (س) ، أ (س) أو اختصارا ك ، ل ، أ ،
مثال :

$$\text{ك (س)} = 5\text{س}^2 + 3\text{س} - 6 - 2\text{س}^2 - 4\text{س} + 2 \text{ هو كثير حدود .}$$

ك (س) هو مجموع وحيدات حد بعضها متشابهة . لنبسطة .

$$\text{ك (س)} = 5\text{س}^2 + 3\text{س} - 6 - 2\text{س}^2 - 4\text{س} + 2$$

بتجميع وحيدات الحد المتشابهة نجد :

$$\text{ك (س)} = (5\text{س}^2 - 2\text{س}^2) + (3\text{س} - 4\text{س}) + (-6 + 2)$$

$$\text{ك (س)} = 3\text{س}^2 - \text{س} - 4$$

- نقول إننا بسطنا ك (س) و رتبناه حسب القوى المتناقصة للمتغير س .
- وحيدات الحد : $3س^2$ ، - س ، - 4 تسمى حدود كثير الحدود ك (س) .
- الأعداد الحقيقية : 3 ، - 1 ، - 4 ، تسمى معاملات كثير الحدود ك (س) .
- درجة كثير الحدود ك (س) هي درجة وحيد الحد الأعلى درجة $3س^2$ أي 2

كثير الحدود المعلوم

الحدود المعلوم هو كثير الحدود الذي كل معاملاته معروفة .

كتابة كثيرات الحدود :

يكتب كل كثير حدود ك (س) غير معلوم على الشكل المبسط و المرتب التالي :

$$ك(س) = أنس^n + أن-1س^{n-1} + + 2س^2 + 1س^1 + 0$$

مع $0 \neq$

- العدد الطبيعي ن هو درجة ك (س) .
 - الأعداد الحقيقية $أن-1$ ، ، 0 هي معاملات ك (س) .
- أمثلة :

- أ (س) = $2س + 1$ هو كثير حدود من الدرجة الأولى :
- ب (س) = $3س^2 - 2س + 2$ هو كثير حدود من الدرجة الثانية
- ج (س) = $3س^3 - 2س + 1$ هو كثير حدود من الدرجة الثالثة .

تساوي كثيري حدود :

تعريف :

يتساوى كثيرا حدود مبسطان تا (س) ، ها (س) إذا وفقط إذا كانا من نفس الدرجة و كان معاملا كل حدين متشابهين فيهما متساويين .
ونكتب : $\forall س \in ح : تا(س) = ها(س)$

مثال :

ليكن : تا (س) = $3س^2 - 2س + 3$ و ها (س) = $2س^2 + 2س - 1$
ولنعين قيم المعاملات أ ، ب ، ج بحيث :

$$\forall س \in ح : تا(س) = ها(س)$$

تا (س) و ها (س) كلاهما من الدرجة الثانية و بالتالي يكون
تا (س) = ها (س) من أجل :

$$1 = 2 ، ب = - 3 ، ج = - 1$$

نقول إننا حصلنا على أ ، ب ، ج بالمطابقة

3. العمليات على كثيرات الحدود

قواعد الحساب وخواص العمليات في ح تبقى صالحة للعمليات على كثيرات الحدود

1) جمع وا طرح كثيرات الحدود

مثال 1 : ليكن : ك = $4س^3 - 5س^2 + 7س - 2$

$$ل = 5س^2 - 3س + 3$$

لنحسب المجموع ك + ل : لدينا :

$$ك + ل = (4س^3 - 5س^2 + 7س - 2) + (5س^2 - 3س + 3)$$

$$= 4س^3 - 5س^2 + 7س - 2 + 5س^2 - 3س + 3$$

(حذف الأقواس)

$$= 4س^3 + (-5س^2 + 5س^2) + (7س - 3س) + (-2 + 3)$$

(التبديل ثم التجميع)

$$= 4س^3 + (2س) + (-2 + 3)$$

$$ك + ل = 4س^3 - 3س^2 + 2س + 1$$

يمكن استعمال الوضع التالي :

بعد تبسيط و ترتيب ك و ل ، نكتب كلا منهما في سطر بحيث تكون الحدود المتشابهة تحت بعضها البعض ، ثم نجمع هذه الحدود المتشابهة وذلك كما يلي :

$$ك = 4س^3 - 5س^2 + 7س - 2$$

$$ل = 5س^2 - 3س + 3$$

$$ك + ل = 4س^3 - 3س^2 + 2س + 1$$

- مجموع كثيري حدود هو كثير حدود ، درجته هي درجة كثير الحدود الأعلى درجة أو أصغر منها

مثال 2 : أ ، ب كثيرات حدود حيث :

$$أ = 3س^4 + 4س^3 - 5س^2 + 7س$$

$$ب = 2س^4 + 2س^2 - 6س - 2$$

لنحسب الفرق أ - ب

لدينا :

$$(أ - ب) = (3س^4 + 4س^3 - 5س^2 + 7س) - (2س^4 + 2س^2 - 6س - 2)$$

$$= 3س^4 + 4س^3 - 5س + 7س^4 - 2س^2 + 6س + 2$$

(حذف الأقواس)

$$= (3س^4 + 4س^3 - 5س + 7س^4 - 2س^2 + 6س + 2)$$

$$= (أ - ب) = 4س^4 + 4س^3 - 2س^2 + 9س + 9$$

و باستعمال الوضع العملي السابق يكون :

$$أ = 3س^4 + 4س^3 - 5س + 7س^4$$

$$ب = 4س^4 - 2س^2 + 6س + 2$$

$$أ - ب = 4س^4 + 4س^3 - 2س^2 + 9س + 9$$

ففرق كثيري حدود هو كثير حدود درجته هي درجة كثير الحدود الأعلى درجة أو أصغر منها

مثال 3 :

أ، ب، ج - كثيرات حدود حيث :

$$أ = 3س^4 - 3س^3 - 5س^2 + 2س - 3$$

$$ب = 3س^2 - 3س + 1$$

$$ج = 3س^3 - 4س + 7$$

لنحسب المجموع أ + ب - ج

$$لدينا : - ج = - 3س^3 + 4س - 7$$

و باستعمال الوضع العملي السابق يكون

$$أ = 3س^4 - 3س^3 - 5س^2 + 2س - 3$$

$$ب = 3س^2 - 3س + 1$$

$$ج - = - 3س^3 + 4س - 7$$

$$أ + ب - ج = 3س^4 - 4س^3 - 2س^2 + 3س - 9$$

بصفة عامة :

مجموع كثيرات حدود هو كثير حدود ، درجته هي درجة كثير الحدود الأعلى درجة أو أصغر منها

خواص عملية جمع كثيرات المتعدد في ح

- الجمع تبديلي و تجميعي
- كثير الحدود المعدوم هو العنصر المحايد للجمع
- لكل كثير حدود تا (س) نظير هو - تا (س)

2) ضرب كثيرات الحدود

مثال 1

لنحسب الجداء $أ \times ك$ حيث :

$$ك = 5س^2 - 4س + 2$$

$$أ = 5س^2$$

$$\text{لدينا : } أ \cdot ك = 5س^2 \cdot (5س^2 - 4س + 2)$$

ضرب وجيد حد في مجموع وحيدات حد توزيعي على الجمع لأن الضرب توزيعي على الجمع في ح أي :

$$أ \cdot ك = 5س^2 \cdot (5س^2) + 5س^2 \cdot (-4س) + 5س^2 \cdot 2$$

$$أ \cdot ك = 5س^4 - 20س^3 + 10س^2$$

بصفة عامة :

جداء وحيد حد أ و كثير حدود ك هو مجموع جداءات | وكل حد من حدود ك

مثال 2 :

لنحسب الجداء $ك \times ل$ حيث :

$$ك = 3س^4 + 5س^2 + 2س - 1$$

$$ل = 5س^2 - 2س + 2$$

لحساب هذا الجداء نستعمل الوضع التالي :

$$ك = 3س^4 + 5س^2 + 2س - 1$$

$$ل = 5س^2 - 2س + 2$$

$$\begin{array}{r} 3س^4 + 5س^2 + 2س - 1 \\ \times 5س^2 - 2س + 2 \\ \hline 6س^6 - 10س^5 + 10س^4 + 2س^3 - 4س^2 + 2س - 2 \end{array}$$

$$ل \times ك = 3س^6 - 6س^5 + 10س^4 - 8س^3 + 5س^2 + 6س - 2$$

• جداء كثيري حدود هو كثير حدود ، درجة هي مجموع درجتيهما

*** خواص عملية ضرب كثيرات الحدود في ح :**

- الضرب تبديلي و تجميعي
- الضرب توزيعي على الجمع
- كثير الحدود $أس$ أي 1 هو العنصر المحايد للضرب

(3) قسمة كثيرات الحدود

- قسمة كثير حدود على وحيد حد .
- لتكن المساواة :

$$\underbrace{12س^5 + 16س^4 - 32س^3}_{\text{ك(س)}} = (8س^2) \times \underbrace{(2س^3 + 4س^2 - 4س)}_{\text{ل(س)}}$$

لاحظ أن 8س² يقسم كل حد من حدود ك (س) .

$$\text{فلدينا : } 12س^5 : 8س^2 = 3س^3$$

$$16س^4 : 8س^2 = 2س^2$$

$$- 32س^3 : 8س^2 = - 4س$$

$$\text{نكتب : } 12س^5 + 16س^4 - 32س^3 : 8س^2 = \underbrace{3س^3 + 2س^2 - 4س}_{\text{ل(س)}}$$

إذن هناك كثير حدود ل(س) بحيث : 8س² × ل(س) = ك(س) (س)
نقول إن ك(س) يقبل القسمة على 8س² .

ل(س) هو حاصل القسمة التام لكثير الحدود ك(س) على 8س²

$$- \text{ليكن ك(س)} = 12س^5 - 32س^3 + 16س$$

ك(س) لا يقبل القسمة على 8س² لأن 8س² يقسم كلا من 12س⁵ و - 32س³ لكنه لا يقسم 16س

ومنه القاعدة العملية :

يقبل كثير الحدود ك(س) القسمة على وحيد الحد أ(س) إذا و فقط إذا كان كل حد من حدود ك(س) يقبل القسمة على أ(س)
ولإيجاد حاصل قسمة ك(س) على أ(س) نقسم كل حد من ك(س) على أ(س) ، ثم نجمع الحواصل

مثال : لنحسب حاصل قسمة 4س³ - 8س² - 2س على 2س

$$\text{لدينا : } 4س^3 : (2س) = 2س^2$$

$$8 \text{ س}^2 : (2 \text{ س} -) = 4 \text{ س}$$

$$2 \text{ س} : (2 \text{ س} -) = 1$$

$$\text{إذن: } (4 \text{ س}^3 - 8 \text{ س}^2 - 2 \text{ س} + 1) : (2 \text{ س} -) = 2 \text{ س}^2 + 4 \text{ س} + 1$$

مثال ٢ :
 $4 \text{ س}^3 - 8 \text{ س}^2 - 2 \text{ س} + 1$ لا يقبل القسمة على $2 \text{ س} -$ لأن الحد $(2 \text{ س} -)$ لا يقبل القسمة على $(2 \text{ س} -)$

القسمة الثامنة كثير حدود على آخر :

$$\text{ليكن : ك (س) } = 2 \text{ س}^3 + 7 \text{ س}^2 + 11 \text{ س} + 10$$

$$\text{ق (س) } = 2 \text{ س} + 2$$

هل يوجد كثير حدود ل (س) بحيث : ك (س) = ق (س) . ل (س) ؟

ك (س) من الدرجة 3

ق (س) من الدرجة 1

إذن ل (س) ، إن وجد ، سيكون من الدرجة 2 أي من الشكل :

$$\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{ج} \text{ و يحقق المساواة ؛}$$

$$\text{ك (س) } = \text{ق (س) } \cdot \text{ل (س)}$$

$$\text{أي : } 2 \text{ س}^3 + 7 \text{ س}^2 + 11 \text{ س} + 10 = (2 \text{ س} + 2) \cdot (\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{ج})$$

$$= (\text{س} \cdot \text{أ س}^2) + (\text{س} \cdot \text{ب س}) + (\text{س} \cdot \text{ج}) + (2 \cdot \text{أ س}^2) + (2 \cdot \text{ب س}) + (2 \cdot \text{ج})$$

$$= \text{أ س}^3 + (\text{أ} + 2 \text{ ب}) \text{ س}^2 + (2 \text{ ب} + 2 \text{ ج}) \text{ س} + 2 \text{ ج}$$

ها (س)

وبالمطابقة بين ها (س) و ك (س) نجد :

$$\begin{array}{l|l} 2 = \text{أ} & 2 = \text{أ} \\ 3 = \text{أ} - 7 = \text{ب} & 2 = \text{أ} + \text{ب} = 7 \\ 5 = \text{ب} - 11 = \text{ج} & 2 = \text{ب} + \text{ج} = 11 \\ 5 = \text{ج} & 2 = \text{ج} = 10 \end{array} \quad \text{أي :}$$

وبالتالي يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية ، هو :

$$\text{ل (س) } = 2 \text{ س}^2 + 3 \text{ س} + 5$$

إذن : ك (س) يقبل القسمة على ق (س)

$$\text{نكتب : } (2 \text{ س}^3 + 7 \text{ س}^2 + 11 \text{ س} + 10) : (2 \text{ س} + 2) = 2 \text{ س}^2 + 3 \text{ س} + 5$$

وعملنا نستعمل الوضع التالي لإيجاد حاصل قسمة $2 \text{ س}^3 + 7 \text{ س}^2 + 11 \text{ س} + 10$

على $2 \text{ س} + 2$:

$\begin{array}{r} 2 + \text{س} \\ \hline 2\text{س}^2 + 3\text{س} + 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 + \text{س} \quad 11 + 2\text{س}^2 + 7\text{س}^3 + 2\text{س}^4 \\ \hline 2\text{س}^2 - 3\text{س}^3 - 4\text{س}^4 \end{array}$	ك (س) \leftarrow - ق (س). $2\text{س}^2 \leftarrow$
$\begin{array}{r} \hline 10 + \text{س} \quad 11 + 2\text{س}^2 + 3\text{س}^3 + \\ \hline 3\text{س}^2 - 6\text{س}^3 \end{array}$	$\begin{array}{r} \hline 10 + \text{س} \quad 5 \\ \hline 10 - 5\text{س} \end{array}$	ك ₁ (س) \leftarrow - ق (س). $(3\text{س}) \leftarrow$
$\begin{array}{r} \hline 10 + \text{س} \quad 5 \\ \hline 10 - 5\text{س} \end{array}$	$\begin{array}{r} \hline 10 + \text{س} \quad 5 \\ \hline 10 - 5\text{س} \end{array}$	ك ₂ (س) \leftarrow - ق (س). $5 \leftarrow$
$\begin{array}{r} \hline 10 + \text{س} \quad 5 \\ \hline 10 - 5\text{س} \end{array}$	$\begin{array}{r} \hline 10 + \text{س} \quad 5 \\ \hline 10 - 5\text{س} \end{array}$	ك ₃ (س) \leftarrow

حاصل قسمة 2س^3 على س

حاصل قسمة 3س^2 على س

حاصل قسمة 5س على س

مثال : لنقسم $2\text{س}^4 + 8\text{س}^3 - 16\text{س} + 8$ على $2\text{س}^2 - 4$. باستعمال الوضع العملي السابق :

$\begin{array}{r} 2\text{س}^2 - 4 \\ \hline 2\text{س}^4 + 4\text{س}^2 - 2\text{س} \end{array}$	$\begin{array}{r} 2\text{س}^4 + 8\text{س}^3 - 16\text{س} + 8 \\ \hline 2\text{س}^4 - 4\text{س}^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2\text{س}^4 + 8\text{س}^3 - 16\text{س} + 8 \\ \hline 2\text{س}^4 - 4\text{س}^2 \end{array}$
$\begin{array}{r} \hline 2\text{س}^4 + 4\text{س}^2 - 2\text{س} \end{array}$	$\begin{array}{r} \hline 2\text{س}^4 + 8\text{س}^3 - 16\text{س} + 8 \\ \hline 2\text{س}^4 - 4\text{س}^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} \hline 2\text{س}^4 + 8\text{س}^3 - 16\text{س} + 8 \\ \hline 2\text{س}^4 - 4\text{س}^2 \end{array}$
$\begin{array}{r} \hline 2\text{س}^4 + 4\text{س}^2 - 2\text{س} \end{array}$	$\begin{array}{r} \hline 2\text{س}^4 + 8\text{س}^3 - 16\text{س} + 8 \\ \hline 2\text{س}^4 - 4\text{س}^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} \hline 2\text{س}^4 + 8\text{س}^3 - 16\text{س} + 8 \\ \hline 2\text{س}^4 - 4\text{س}^2 \end{array}$
$\begin{array}{r} \hline 2\text{س}^4 + 4\text{س}^2 - 2\text{س} \end{array}$	$\begin{array}{r} \hline 2\text{س}^4 + 8\text{س}^3 - 16\text{س} + 8 \\ \hline 2\text{س}^4 - 4\text{س}^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} \hline 2\text{س}^4 + 8\text{س}^3 - 16\text{س} + 8 \\ \hline 2\text{س}^4 - 4\text{س}^2 \end{array}$

ومنة :

$$(2\text{س}^4 + 8\text{س}^3 - 16\text{س} + 8) : (2\text{س}^2 - 4) = 2\text{س}^2 + 4\text{س} - 2$$

قسمة كثير حدود على آخر

ليكن: ك (س) $= 6\text{س}^4 - 2\text{س}^3 + 9\text{س}^2 - 2\text{س} - 2$ ؛ ق (س) $= 2\text{س}^2 + 2$

لنقسم ك(س) على ق(س) باستعمال الوضع العملي السابق:

$س^2 + 2$	$6س^4 - 2س^3 + 9س^2 - 2س - 2$
$6س^2 - 2س - 3$	$-6س^4 + 12س^2$
	$-2س^3 - 3س^2 - 2س - 2$
	$+2س^3 + 4س$
	$-3س^2 + 2س + 2 - 6$
	$+3س^2 + 6$
	$+2س + 4$

لاحظ أن درجة $2س + 4$ أصغر من درجة القاسم .
و بالتالي لا يمكن متابعة القسمة .

إذن ك(س) لا يقبل القسمة على ق(س).

و نكتب : $ك(س) = ق(س) \cdot (6س^2 - 2س - 3) + (2س + 4)$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
المقسوم القاسم الحاصل الباقي

ومنه النتيجة العامة :

ك(س) و ق(س) كثيرا حدود بحيث :
 $ق(س) \neq 0$ و (درجة ك(س) \leq درجة ق(س))
يوجد كثيرا حدود ل(س) و ب(س) بحيث :
 $ك(س) = ق(س) \times ل(س) + ب(س)$
و درجة ب(س) $>$ درجة ق(س)

ك(س) هو المقسوم

ق(س) هو القاسم

ل(س) هو الحاصل

ب(س) هو الباقي

العملية التي ترفق كثيري الحدود ك(س) و ق(س) بكثيري الحدود ل(س) و ب(س) تسمى القسمة الاقليدية لكثيرات الحدود .

ملاحظة :

إذا كان الباقي ب(س) معدوماً فالقسمة تامة أي :
ك(س) = ق(س) × ل(س)

قابلية القسمة على س - α

- جذر كثير حدود

ليكن تا(س) = $s^2 - 6s + 5$

و لنحسب تا(5) :

$$\text{تا}(5) = 5^2 - (5 \times 6) + 5$$

$$= 0$$

تا(س) ينعدم من أجل س = 5

نقول إن العدد 5 هو جذر لكثير الحدود $s^2 - 6s + 5$.

- لنحسب تا(-3) :

$$\text{تا}(-3) = (-3)^2 - (6 \times (-3)) + 5 = 32 \neq 0$$

العدد (-3) ليس جذراً لكثير الحدود $s^2 - 6s + 5$ وبصفة عامة

يكون العدد الحقيقي α جذراً لكثير الحدود تا(س) إذا وفقط إذا كان تا(α) = 0

$$\alpha \text{ جذر لكثير الحدود تا(س)} \Leftrightarrow \text{تا}(\alpha) = 0$$

مثال : تا(س) = $s^2 - 1$

لدينا : تا(1) = 0 و تا(-1) = 0

فكل من (1-) و (1+) هو جذر لكثير الحدود تا(س) بينما العدد 0 ليس جذراً له

لأن تا(0) $\neq 0$

قابلية قسمة كثير حدود على س - α

نقول الخاصية التالية :

يكون كثير الحدود تا(س) قابلاً للقسمة على س - α إذا وفقط إذا كان تا(α) = 0

مثال 1 :

ليكن : تا(س) = $s^2 - 6s + 5$

لدينا : تا(5) = 0

إذن تا(س) يقبل القسمة على س - 5

أي يوجد كثير حدود ك(س) بحيث : تا(س) = (س - 5) . ك(س)

ك(س) هو حاصل قسمة تا(س) على (س - 5).

لنبحث عن ك(س).

بما أن تا(س) من الدرجة الثانية و (س - 5) من الدرجة الأولى فإن ك(س) يكون

من الدرجة الأولى ،أي أن ك(س) من الشكل أ س + ب .
فالبحث عن ك(س) يؤول إلى البحث عن العددين الحقيقيين أ ، ب .
لدينا : تا(س) = (س - 5) . (أ س + ب)

(نشر)

$$أ س^2 + ب س - 5 أ س - 5 ب$$

$$= أ س^2 + (ب - 5 أ) س - 5 ب$$

بالمطابقة بين عبارتي تا(س) أي :

$$أ س^2 + (ب - 5 أ) س - 5 ب = س^2 - 6 س + 5$$

نجد :

$$أ = 1 \text{ و } ب = 5 - 1 = 4 \text{ و } 5 = 5 - 6 + 5$$

$$\text{أي : } أ = 1 \text{ و } ب = 1 \text{ و } 5 = 5 - 6 + 5$$

و بما أن ب - 5 أ = 6 - 5 = 1 محقة من أجل أ = 1 و ب = 1

فإن العددين المطلوبين هما : أ = 1 و ب = 1

ومنه ك(س) = س - 1

إذن تا(س) = (س - 5) (س - 1)

يمكن الحصول على ك(س) باستعمال الوضع العملي :

س - 5	س ² - 6س + 5
س - 1	- س ² + 5س

	س + 5
	س - 5

	0

و نكتب : تا(س) = (س - 5) (س - 1)

مثال 2 : العدد -2 هو جذر لكثير الحدود 2س³ + 7س² + 11س + 10

لنعين حاصل قسمته على س + 2

باستعمال الوضع العملي نجد :

س + 2	2س ³ + 7س ² + 11س + 10
2س ² + 3س + 2	- 2س ³ - 4س ² - 3س - 2

	10س ² + 11س + 8
	3س ² - 6س - 2

	5س + 10
	5س - 10

	0

4. تحليل كثير حدود.

تحليل كثير حدود يعني كتابته على شكل جداء عوامل .
نقدم فيما يلي بعض الطرق لتحليل كثير الحدود .
(1) إخراج العامل المشترك :

مثال 1 :

لنحلل $ك(س) = 5س - 5ب$
لاحظ أن $5س$ عامل مشترك للحددين :
أي : $ك(س) = 5(س - أ) . ب$
ومنه : $ك(س) = 5(س - أ - ب)$

مثال 2 :

لنحلل $ك(س) = 3س^2 + 2س - 2س^3$
س عامل مشترك لكل الحدود .
ومنه : $3س^2 + 2س - 2س^3 = س(3س - 1 + 2س^2)$
(2) استعمال الجداءات الشهيرة

مثال 1 :

لنحلل : $ك(س) = 4س^2 + 4س + 4$
لدينا : $ك(س) = 4س^2 + 2(2س) + 2(2)$
فهو من الشكل $أ^2 + 2أب + ب^2$ الذي يكتب $(أ + ب)^2$
ومنه : $4س^2 + 4س + 4 = (2س + 2)^2$

مثال 2 :

لنحلل $ك(س) = 9س^2 - 6س - 1$
لدينا : $ك(س) = 9س^2 - 2(3س) + 1$
فهو من الشكل $أ^2 - 2أب + ب^2$ الذي يكتب $(أ - ب)^2$
ومنه : $9س^2 - 6س - 1 = (3س - 1)^2$

مثال 3 :

لنحلل : $ك(س) = 9س^2 - \frac{9}{25}$
لدينا : $ك(س) = 9س^2 - 2(\frac{3}{5}) + \frac{9}{25}$
فهو من الشكل $أ^2 - 2أب + ب^2$ الذي يكتب $(أ - ب) . (أ + ب)$
ومنه : $9س^2 - \frac{9}{25} = (\frac{3}{5} - س) . (\frac{3}{5} + س)$

2 استعمال قابلية القسمة على س - α

ليكن ك (س) كثير حدود حيث : ك (س) = $2س^3 - 2س^2 - 18س + 9$
تحقق أن ك $(\frac{1}{2}) = 0$

إذن ك (س) يقبل القسمة على $(س - \frac{1}{2})$.

و لنبحث عن حاصل قسمة ك (س) على $(س - \frac{1}{2})$.
باستعمال الوضع العملي نجد:

$س - \frac{1}{2}$	$2س^3 - 2س^2 - 18س + 9$
$2س^2 - 18س$	$-2س^3 + 2س^2 + 18س - 9$
	$36س - 9$
	$36س - 9$
	0

إذن: ك (س) = $(س - \frac{1}{2})(2س^2 - 18س + 9)$

يمكن متابعة التحليل حيث أن $2س^2 - 18س + 9 = 2(س^2 - 9س + \frac{9}{2})$
 $= 2(س - 3)(س + \frac{3}{2})$

فيكون:

$$ك(س) = (س - \frac{1}{2})(س - 3)(س + 3)$$

$$= (س - \frac{1}{2})(س - 3)(2س + 3)$$

5. تطبيقات

(1) الكسور الناطقة

ك (س) و ل (س) كثيرا حدود ، ل (س) $\neq 0$
النسبة $\frac{ك(س)}{ل(س)}$ تسمى كسرا ناطقا ، بسطه ك (س) و مقامه ل (س)

- إذا كان ك (س) $= 0$ فإن $\frac{ك(س)}{ل(س)} = 0$

- إذا كان ل (س) $= 0$ فإن $\frac{ك(س)}{ل(س)}$ غير معرف.

مثال: $ل = \frac{س^2 + 1}{س - 1}$ هو كسر ناطق.

أي $س = 1$

ل غير معرف إذا كان $س = 1$

نقول إن ل معرف في المجموعة : ح - {1}

فالمجموعة : ح - {1} تسمى مجموعة تعريف الكسر الناطق $\frac{س^2 + 1}{س - 1}$

إذا كان $\frac{ك(س)}{ق(س)}$ كسرا ناطقا فإن :

$$0 = \frac{ك(س)}{ق(س)} \Leftrightarrow 0 = ك(س)$$

$$ق(س) = 0 \Leftrightarrow \frac{ك(س)}{ق(س)} \text{ غير معرف}$$

(2) اختزال كسر ناطق

$$ليكن الكسر الناطق : ل = \frac{س^2 - 4}{س^2 + 4س + 4}$$

لاحظ أن : $س^2 - 4 = (س - 2)(س + 2)$

و : $س^2 + 4س + 4 = (س + 2)^2$

إذن :

$$\frac{(2+s)(2-s)}{(2+s)^2} = \frac{4-s^2}{4+s^2+4}$$

فالكسر الناطق ل يكون غير معرف من أجل : $0 = (2+s)^2$

أي من أجل $2+s=0$ أي $s=-2$ ويكون معرفا من أجل $s \neq -2$.
لاحظ أن : $2+s$ هو عامل مشترك بين البسط و المقام .

و $\forall s \neq -2$: $\{2-s\}$ حـ

وبالتالي يمكن قسمة كل من البسط و المقام على $2+s$.
فنحصل على :

$$\frac{2-s}{2+s} = \frac{(2+s)(2-s)}{(2+s)(2+s)} = \frac{4-s^2}{4+s^2+4} = \frac{4-s^2}{8+s^2}$$

بهذا نقول إننا اختزلنا الكسر ل .

والكسر الناطق $\frac{2-s}{2+s}$ يسمى الكسر المختزل .

(3) كتابة كسر ناطق على شكل مجموع كثير حدود و كسر ناطق
ليكن الكسر الناطق :

$$\frac{s^2+s-1}{s+3} = \text{ك}$$

الكسر ك غير معرف من أجل $0 = s+3$ أي من أجل $s=-3$

إذن ك معرف من أجل : $s \neq -3$ حـ - $\{3-\}$

$s+3$	s^2+s-1	نقسم s^2+s-1 على $s+3$
$s+3$	s^2+3s	
$-s-3$	$-s-3$	
$2s+6$	$2s+6$	
5	5	

بقسمة الإقليدية نجد :

$$(1) \quad s^2+s-1 = (s+3) \cdot (s-2) + 5$$

و $\forall s \neq -3$: $\{3-\}$ حـ : $s+3 \neq 0$

و بقسمة طرفي (1) على س+3 نجد :

$$\frac{5}{3+s} + \frac{(2-s) \cdot (3+s)}{3+s} = \frac{1-s^2+2s}{3+s}$$

وباختزال الكسر $\frac{(2-s) \cdot (3+s)}{3+s}$ يكون :

$$\frac{5}{3+s} + (2-s) = \frac{1-s^2+2s}{3+s}$$

كسر ناطق

كثير حدود

6. تمرين محلول

- لنكن العبارة الجبرية ك(س) = $(س^2 - 4)^2 - (س - 2)^2$
- (1) انشر ثم بسط ورتب ك(س) حسب قوى س المتناقصة
 - (2) حلل ك(س) إلى كثيرات حدود من الدرجة الأولى
 - (3) احسب ك(0) و ك(-3)
 - (4) اثبت أن ك(س) يقبل القسمة على س - 2

الحل :

1. نشر وتبسيط وترتيب ك(س) .

لدينا :

$$\begin{aligned} \text{ك(س)} &= (س^2 - 4)^2 - (س - 2)^2 \\ &= (س^4 - 8س^2 + 16) - (س^2 - 4س + 4) \\ &= س^4 - 8س^2 + 16 - س^2 + 4س - 4 \\ &= س^4 - 9س^2 + 4س + 12 \\ \text{ك(س)} &= س^4 - 9س^2 + 4س + 12 \end{aligned}$$

نشر ك(س) هو كثير حدود من الدرجة الرابعة .

2. تحليل ك(س) إلى كثيرات حدود من الدرجة الأولى :

$$\text{لدينا : ك(س)} = (س^2 - 4)^2 - (س - 2)^2$$

لاحظ أن :

$$2(2-s)^{-2}[(2+s) \cdot (2-s)] = (s) \text{ك}$$

$$[1 - 2(2 + s)]^2(2 - s) =$$

$$[1 - (2 + s)]^2 (2 - s) =$$

3. حساب ك (0) و ك (3 -)

$$(2) \dots\dots\dots (3+s) \cdot (1+s) \cdot ^2(2-s) =$$

الثابت 12. فيكون : $k(0) = 12$

يكون الجداء معدوما من أجل $s = 3$ -

أي : ك (-3) = 0

4 - قابلية قسمة ك (س) على س - 2

لدينا : $k(s) = (s-2)^2(s+1)(s+3)$

$$(3+2) \cdot (1+2)^2 (2-2) = (2) \text{ك}$$

$$0 = (2) \text{ك}$$

إذن ك(س) يقبل القسمة على س - 2

وللبحث عن حاصل القسمة ، نستعمل الوضع العملي .

فنجد:

نکتہ : $\frac{س(س)}{س-2} = س^3 + 2س^2 - 5س - 6$

تمارين

وحيدات الحد

1 عَيِّن ، من أجل كل من وحيدات الحد التالية :

- المعامل

- الدرجة بالنسبة للمتغير س

- الدرجة بالنسبة للمتغير ع

- الدرجة بالنسبة للمتغير س و ع .

(1) $3س^2ع^3$ (2) $-س^2ع^3$

(3) $\frac{س^3ع}{4}$ (4) $-2س^3ع^2$

(5) $-\frac{2ع^2س^2}{5}$ (6) $4س^2 (-\frac{1}{3})$

2 احسب المجاميع الجبرية التالية (س و ع هما المتغيران)

(1) $2س^2ع^2 + 3س^2ع + 6س^2ع^2$

(2) $\frac{2}{3}س^3ع^4 + \frac{1}{4}س^3ع^4 - \frac{1}{12}س^3ع^4$

(3) $-\frac{1}{5}أب^2س + \frac{1}{4}أب^2س + \frac{11}{20}أب^2س$

3 احسب الجداءات التالية (س و ع هما المتغيران) .

(1) $(2س^3) \cdot (-2س^2ع)$

(2) $(-\frac{1}{3}س ع) \cdot (\frac{3}{5}س^2ع)$

(3) $(\frac{3}{4}س^2) \cdot (\frac{5}{3}س^2)$

(4) $(\frac{2}{5}س^2ع^2) \cdot (-\frac{5}{4}س ع^2)$

4 احسب مربعات و مكعبات وحيدات الحد التالية .

(المتغيران هما س و ع)

(1) $\frac{1}{3}س^2ع^2$ (2) $-\frac{2س^3ع^2}{5}$ (3) $-\frac{2}{3}س^3ع^2$

5 أحسب حاصل القسمة في كل مما يلي ، حيث س و ع هما المتغيران

بفرض القاسم غير معدوم .

1 (2س⁴ع² -) ÷ (3س²ع²)

2 (- 1س⁴ع²) ÷ (- 2س³ع²)

3 (3س²ع²) ÷ (- 1س⁴ع²)

. جمع و طرح كثيرات الحدود لمتغير حقيقي س

6 لتكن كثيرات الحدود

أ = 3س³ - 4س² + 3س - 1

ب = 2س³ - 5س² + 4س + 3

ج = 3س³ + 3س² - 5س - 2

عين المجاميع :

2 (أ + ب - ج)

4 (أ + ب - ج)

1 (أ + ب + ج)

3 (ج + أ - ب)

7 أنجز العمليات التالية :

1 3س - (2س² + 3) - (2س + 3س² - 1) - (3س - 2)

2 (4س² - 3س) + (2 - (3س + 2س²)) - (3س³ - (1 - 2س)) - 3س³

3 (2 - 2س²) + (1 - أ) - (4 - 2س³)

4 1 - 3س³ + (4 + 2س²) - (3س³ + 2س² - 4س + 3)

5 3س³ + (2س² - 1) - (3س² - 5س)

أنجز الجداءات التالية :

1 (2س³ + 3س² + 3) . (2س² - 1)

2 (1 + 3س³ + 2س²) . (1 - 3س)

3 (3س³ - 5س² - 4) . (1 - 4س²)

4 (2س - 1) . (3س + 1) . (1 + 3س)

5 (2س³ - 1) . (1 + 3س) . (2س² - 1)

9 أنجز العمليات التالية :

(1) $(2س + 3) \cdot (س^2 + س - 1) - س^3 - (س^2 + 1) \cdot (س + 4)$
 (2) $[(س^2 + 1) - 3س] \cdot (س + 2) \cdot [س - (س^2 + 1)]$
 (3) $(س^2 + 1) \cdot (س - 1) \cdot (س + 1) - (س + 2) \cdot (س^2 - 3) \cdot س$
 عين الأعداد الحقيقية أ ، ب ، ج في كل من الحالات التالية علما بأن

10

٧ س ج : ك (س) = ل (س)
 (1) ك (س) = (أ - 2) س³ - 3 س² - 5 (ب - 3) س + ج
 و ل (س) = 2 س³ - 3 س² + 2 س - 12
 (2) ك (س) = (أ + 2) س³ - 5 (ب - 3) س + ج
 و ل (س) = 0
 (3) ك (س) = (أ + 1) س² - ب س + ج
 و ل (س) = 2 أس² + س + 2 ب

11

أنجز عمليات القسمة التالية، بفرض القاسم غير معدوم.
 (1) $(9س^5 + 6س^4 - 2س^3) : 3س^2$
 (2) $(12س^4 - 16س^2 + 20س) : (-4س)$
 (3) $(4س^3 - 6س - 3س^2) : 3س$
 (4) $(5س - 6س^2 + 3س^3 - 2س) : (-3س)$

12

أ، ب كثيرا حدود للمتغير الحقيقي س (ب ≠ 0)
 تحقق أن أ يقبل القسمة على ب ، ثم عين الحاصل التام لقسمة أ على ب

(1) $أ = س^2 + 5س + 6$ و $ب = س + 2$
 (2) $أ = 2س^2 + 14س + 24$ و $ب = س - 3$
 (3) $أ = 3س^3 - 8س^2 + 7س - 2$ و $ب = 3س - 2$
 (4) $أ = 3س^2 + 5س + 6$ و $ب = س^2 - 3س + 3$

13

أ ، ب كثيرا حدود للمتغير الحقيقي س ، (ب ≠ 0)
 تحقق في كل مما يلي أن أ لا يقبل القسمة على ب ، ثم عين حاصل و باقي قسمة أ على ب.

(1) $أ = س^3 + 6س^2 + 3س - 7$ و $ب = س + 2$
 (2) $أ = 2س^3 - 3س^2 - 5$ و $ب = 2س + 1$
 (3) $أ = س^3 - 1س^2 - 2س$ و $ب = 4س + 2$
 (4) $أ = 6س^3 - 2س^2 + 1س - 1$ و $ب = 3س - 1$

تحليل كثيرات الحدود:

14 أخرج وحيد الحد الأعلى درجة كعامل مشترك في كل من كثيرات الحدود التالية:

$$\begin{aligned} (1) & 8س^3 - 12س^2 + 16س \\ (2) & 18س^2ع^2 - 12س^2 + 6س ع \\ (3) & 2أس^4 + 5س^2 - 3س^3 - 6س^4 \end{aligned}$$

15 حل كلا من العبارات الجبرية التالية:

$$\begin{aligned} (1) & (س+1)(3-س) - (1-5س)(3-س) \\ (2) & (7س-1)^2(7س-1) - (3س+2)(1-7س) \\ (3) & (7س-5)(3-س)^2 - (3-س)^2(3-س) \\ (4) & (4-3س)(3س-4) - (3س+2)(2-1س) \\ (5) & (س-5)(8س+2) - (6-س)(س-6) \\ (6) & 2(4س^2+2س+1) + 3(2س+1) \\ (7) & (3س+1)(3-س) + (3س+1)(2-س) - (4س+5)(3س+1) \\ (8) & 2(1س+2) - (3س-4)(1س+2) + (3س-4)(1س+2) \end{aligned}$$

16 حل كثيرات الحدود التالية ، مستعملا الجداءات الشهيرة

$$\begin{aligned} (1) & 9س^2 - 6س + 1 \\ (2) & 4س^2 - 2س + \frac{1}{4} \\ (3) & 4س^2 + 12س + 9ع^2 \\ (4) & 4س^2 + 4س + 1 \\ (5) & 16س^2 - 56س + 49 \\ (6) & 9ب^2 - 6أب + 4أ^2 \\ (7) & 9س^2 + 6س - 9 \\ (8) & 2س^2 - 12س + 18 \\ (9) & 9س^2 + 12س + 4 \\ (10) & 9س^2 - 4 \\ (11) & (1+س)^2 - 1 \\ (12) & 4(3س+4)^2 - (5س-1)^2 \\ (13) & 4س^2 - 2ع^2 \\ (14) & 4(س+\frac{1}{4})^2 - \frac{49}{16} \\ (15) & 5(2س+2)^2 - (3س-6)^2 \\ (16) & 2(4ع-س)^2 - (1ع-1)^2 \\ (17) & 2(2س-3)^2 - (2س+3)^2 \end{aligned}$$

17 حلل العبارات الجبرية التالية:

$$(1) 9س^2 - (4س+5)(3-س)$$

$$\begin{aligned}
 (2) & 4س^2 - 9 - 2(س - 3). (س + 1) \\
 (3) & 16س^2 - 9 + (4س + 3). (س - 1) \\
 (4) & 9س^2 - 1 - 2(س - 1)^2 \\
 (5) & 4(س - 4)^2 - (س - 2)^2 \\
 (6) & (5س - 10)(س - 3) - 3(س - 4) \\
 (7) & (2س^2 - 18)(س - 2) - (س^2 - 9)(س - 1) + 3س - 3س \\
 (8) & (س - 5)(3س - 8) + (س - 5)^2 + 2س^2 - 50 \\
 (9) & 15س^3 - 2(س - 5)^2 + 25س^2 - 3س
 \end{aligned}$$

حلل كلا مما يأتي باستعمال نشر كل من (أ+ب)³ ، (أ-ب)³ :

18

$$\begin{aligned}
 (1) & 8س^3 + 12س^2 + 6س + 1 \\
 (2) & 9س^3 - 9س^2ع + 9س - 9ع^2 \\
 (3) & 8س^3 + 6س^2ع + 6س - 6ع^2 + 3س^3 \\
 (4) & 9س^3 - 9س^2س + 9س - 9س^3
 \end{aligned}$$

حلل كلا مما يأتي باستعمال تحليل كل من 3أ + 3ب ، 3أ - 3ب

19

$$\begin{aligned}
 (1) & 1س^3 + 1س^3 \\
 (2) & 1س^3 - 1س^3 \\
 (3) & 1س^3 + \frac{1}{27} \\
 (4) & 1س^3 - 1س^3 \\
 (5) & 1س^4 - 1س^4 \\
 (6) & 1س^3 - 64
 \end{aligned}$$

20

أوجد مجموعة تعريف كل من الكسور الآتية ثم ضع كلا منها على شكل مجموع كثير حدود و كسر ناطق درجة بسطه أصغر من درجة مقامه

$$\begin{aligned}
 (1) & \frac{1س^2 + س - 1}{س^3 + 3س} \\
 (2) & \frac{3س^3 - 8س^2 + 7س - 5}{3س^2 - 2س} \\
 (3) & \frac{3س^4 + 2س^3 - 1س}{س^2 + 3س} \\
 (4) & \frac{5س^5 + 3س^4 - 3س^3 - 2س}{س^2 - 2س + 1}
 \end{aligned}$$

1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

لتكن العبارتان :

تا (س) = (س - 3) - 2 - 4 ؛ ها (س) = (س - 1) (س - 5)
- أثبت أنه من أجل كل قيمة للمتغير س فإن :

$$(س - 3) - 2 - 4 = (س - 1) (س - 5)$$

نقول إن العبارتين تا (س) و ها (س) متطابقتان .

ونكتب : $\forall س \in \mathbb{R} : (س - 3) - 2 - 4 = (س - 1) (س - 5)$

نشاط 2 :

ليكن كثير الحدود للمتغير الحقيقي س :

$$تا (س) = 3س - 1 \quad و \quad ها (س) = س + 3$$

تحقق أنه :

- من أجل س = 2 يكون تا (س) = ها (س)

- و من أجل س = 0 يكون تا (س) \neq ها (س)

هذا يعني أن المساواة تا (س) = ها (س) ليست محققة من أجل كل عدد حقيقي س
فهي جملة مفتوحة معرفة في \mathbb{R} .

هذه الجملة تكون إما قضية صحيحة وإما قضية خاطئة حسب قيم المتغير الحقيقي س

الجملة المفتوحة تا (س) = ها (س) المعرفة في \mathbb{R} تسمى معادلة بالمجهول

الحقيقي س .

تا (س) و ها (س) هما طرفا هذه المعادلة .

العدد الحقيقي 2 الذي يحقق هذه المساواة يسمى حلا لهذه المعادلة في المجموعة \mathbb{R}

العدد 0 ليس حلا لها .

نشاط 3 :

عبر عن كل من التعبيرين الآتيين بمعادلة

1) قطعة أرض مستطيلة مساحتها 21 (متر مربع) ، و عرضها ينقص عن

طولها بأربعة أمتار .

2) بإضافة العدد الحقيقي نفسه إلى كل من حدي الكسر $\frac{3}{5}$ نحصل على العدد 2

2. المعادلات

(1) عمومیات

• تعاريف

حل المعادلة $Ta(s) = Ha(s)$ ، في مجموعة L ، هو إيجاد كل قيم العدد s من L التي تحقق هذه المعادلة .
مجموعة هذه القيم تسمى مجموعة حلول تلك المعادلة في المجموعة L .

يمكن أن تكون ل إحدى المجموعات العددية المألوفة : ط ، ك ، ص ، ح

مثال :

عَيِّن ، من بين الأعداد : - 1 ، 0 ، $\frac{1}{2}$ ، 1 ، 2 ، 3 تلك التي هي حلول للمعادلة

$$2s = 3 + 2s^2$$

المعادلات المتكافئة :

نقول عن معادلتين في مجموعة L إنهما متكافئتان إذا و فقط إذا كان لهما نفس الحلول في L .

مثال

لتكن المعادلتين في ح :

(1)..... 12 = 3 س

(2)..... 8 = 2 س

يوجد عدد حقيقي واحد ، هو 4 ، يحقق كلا من المعادلتين (1) و (2) أي

$$8 = 4 \times 2 \quad , \quad 12 = 4 \times 3$$

إذن العدد 4 هو الحل الوحيد لكل من المعادلتين (1) و (2) فهما متكافئتان في ح

ونکتب : $3 \text{ س} = 12 \Leftrightarrow 2 \text{ س} = 8$

(2) تحويل المعادلات

. تحويل معادلة معرفة في ل هو إيجاد معادلة مكافئة لها في ل

قواعد تحويل المعادلات :

قاعدة 1

نحصل على معادلة مكافئة لمعادلة مفروضة بنقل حد من طرف إلى آخر مع تغيير إشارته

$$0 = (س) \Leftrightarrow (س) = 3 - (س) \text{ ها}$$

مثال :

$$\text{المعادلتان : } (س) = 3 + (س) \text{ و } (س) = 3 - (س) \text{ متكافئتان}$$

$$\text{والمعادلتان : } (س) = 3 + (س) \text{ و } (س) = 3 - (س) \text{ متكافئتان}$$

نستنتج أن : $(س) = 3 + (س)$ و $(س) = 3 - (س)$ هي معادلات متكافئة .

قاعدة 2 :

نحصل على معادلة مكافئة لمعادلة مفروضة بضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الحقيقي غير المعلوم α

$$(س) = (س) \Leftrightarrow \alpha (س) = \alpha (س) \text{ ها}$$

مثال :

$$\text{المعادلتان : } 5(س) = 2 \text{ و } \frac{2}{5}(س) = 2 \text{ متكافئتان}$$

$$\text{والمعادلتان : } 5(س) = 2 \text{ و } 10(س) = 4 \text{ متكافئتان}$$

$$\text{نستنتج أن : } 5(س) = 2 \text{ و } \frac{2}{5}(س) = 2 \text{ و } 10(س) = 4 \text{ هي معادلات متكافئة .}$$

(3) درجة معادلة

لتكن المعادلة $(س) = (س)$

بتطبيق القاعدة 1 نجد :

$$(س) = (س) \Leftrightarrow (س) = 3 - (س) \text{ ها}$$

بوضع $ك = (س)$ نحصل على :

$$(س) = (س) \Leftrightarrow ك = 3 - ك$$

فدرجة المعادلة $(س) = (س)$ هي درجة كثير الحدود $ك = 3 - ك$ المبسط .

مثال 1 :

$$\text{لنبحث عن درجة المعادلة : } 4(س) + 1 = 2(س) - 6$$

نحولها إلى الشكل $ك = 0$

بتطبيق القاعدة 1 يكون :

$$4(س) + 1 = 2(س) - 6 \Leftrightarrow 4(س) - (2(س) - 6) = 0$$

$$0 = (6 + 1) + (4س - 2س) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 7 + 2س \text{ فدرجة المعادلة}$$

4س + 1 = 2س - 6 هي درجة كثير الحدود المبسط 2س + 7 أي الدرجة الأولى .

مثال 2 :

للبحث عن درجة المعادلة : $-س^2 + س - 5 = 0$ نحولها إلى الشكل ك (س) = 0

$$\text{لدينا : } -س^2 + س - 5 = 0 \Leftrightarrow س^2 - س + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow س^2 - 2س + 5 = 0$$

فالمعادلة $-س^2 + س - 5 = 0$ هي من الدرجة الثانية

3 . المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

(م) : $8س + 2(س - 1) = 6س - 5$ معادلة معرفة في ح .

لنبحث عن معادلة مكافئة لها من الشكل ك (س) = 0 بتطبيق قواعد تحويل المعادلات يكون :

$$(م) \Leftrightarrow 8س + 2س - 2 = 6س - 5$$

$$\Leftrightarrow 8س + 2س - 6س = 2 - 5$$

$$\Leftrightarrow 4س = 3$$

$$\Leftrightarrow 4س + 3 = 0$$

فالمعادلة (م) تكافئ المعادلة $4س + 3 = 0$ التي هي من الدرجة الأولى في ح ومن الشكل أ س + ب = 0 حيث : أ و ب عدنان حقيقيان .
ومنه :

كل معادلة في ح تحول إلى الشكل أ س + ب = 0 هي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهول س .

أ و ب عدنان حقيقيان معلومان و $أ \neq 0$

حل المعادلة أ س + ب = 0 في ح .

نميز الحالات التالية :

$$1) أ \neq 0$$

$$أس = ب \Leftrightarrow \frac{1}{ا} (أس) = \frac{1}{ا} ب$$

$$\Leftrightarrow س = \frac{ب}{ا}$$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي : مج = $\{ \frac{ب}{ا} \}$

$$(2). أ = 0, \text{ و } ب \neq 0$$

المعادلة أس = ب تكتب : 0 . س = ب

في هذه الحالة أس = 0 و ب $\neq 0$

إذن لا يوجد أي عدد حقيقي س يحقق المعادلة أس = ب .

مجموعة الحلول هي المجموعة الخالية ϕ

أي : مج = ϕ

$$(3) أ = 0 \text{ و } ب = 0$$

في هذه الحالة : $\forall س$: أس = 0 و ب = 0

فكل عدد حقيقي س يحقق المعادلة أس = ب .

مجموعة الحلول هي مجموعة الأعداد الحقيقية ح

أي : مج = ح

نلخص مناقشة حلول المعادلة أس = ب في الجدول التالي :

الشروط	مجموعة الحلول
$أ \neq 0$	يوجد حل وحيد هو : $س = \frac{ب}{ا}$ ، مج = $\{ \frac{ب}{ا} \}$
$أ = 0 \text{ و } ب \neq 0$	لا يوجد أي حل ، مج = ϕ
$أ = 0 \text{ و } ب = 0$	كل عدد حقيقي هو حل ، مج = ح

مثال 1 :

لتكن المعادلة :

$$(1) \dots \frac{3س}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1-س}{6} - \frac{1+2س}{4}$$

لاحظ ان المقام المشترك هو 12 ، بضرب الطرفين في 12 يكون :

$$\frac{s^3}{2} 12 - \frac{5}{4} 12 = \frac{1-s}{6} 12 - \frac{1+s^2}{4} 12 \Leftrightarrow (1)$$

$$6s^3 - 15 = 2(1-s) - 3(1+s^2) \Leftrightarrow (1)$$

$$6s^3 - 15 = 2 - 2s - 3 + 3s^2 \Leftrightarrow (1)$$

$$6s^3 - 15 = 5 + 3s^2 - 2s \Leftrightarrow (1)$$

$$6s^3 - 15 = 5 + 3s^2 - 2s \Leftrightarrow (1)$$

$$10 = 22s \Leftrightarrow (1)$$

$$\frac{10}{22} = s \Leftrightarrow (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow s = \frac{5}{11} . \text{ حل المعادلة (1) هو } \frac{5}{11} . \text{ أي مج } = \left\{ \frac{5}{11} \right\} .$$

مثال 2 : لتكن المعادلة :

$$3(2s-5) - (s+6) = 5s-4 \dots\dots\dots (1) \text{ لدينا :}$$

$$6s-15-s-6 = 5s-4 \Leftrightarrow (1)$$

$$5s-21 = 5s-4 \Leftrightarrow (1)$$

$$5s-21 = 5s-4 \Leftrightarrow (1)$$

$$0 = 17 \Leftrightarrow (1)$$

المساواة 0 = 17 لا يحققها أي عدد حقيقي س .

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي المجموعة الخالية أي مج = ϕ .

مثال 3 : لتكن المعادلة :

$$4(s-2) - (3s-3) = 3s+1 \dots\dots\dots (1) \text{ لدينا :}$$

$$4s-8-3s+3 = 3s+1 \Leftrightarrow (1)$$

$$s-5 = 3s+1 \Leftrightarrow (1)$$

$$s-5 = 3s+1 \Leftrightarrow (1)$$

$$0 = 0 \Leftrightarrow (1)$$

المساواة 0 = 0 محققة من أجل كل عدد حقيقي س .

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي المجموعة ح ،

أي مج = ح

4. جملة معادلتين خطيتين من الدرجة الأولى

(1) المعادلة الخطية من الدرجة الأولى

تا (س ، ع) ، ها (س ، ع) كثيرا حدود بالمتغيرين الحقيقيين س ، ع حيث :

$$\text{تا (س ، ع) } = 5س + 2ع + 1$$

ها (س ، ع) = -س + ع . تحقق أنه :

- من أجل س = 1 و ع = 5 يكون : تا (س ، ع) = ها (س ، ع)

- و من أجل س = 1 و ع = 1 يكون تا (س ، ع) ≠ ها (س ، ع)

فالمساواة تا (س ، ع) = ها (س ، ع) ليست محققة من أجل كل ثنائية (س ، ع) من \mathbb{C}^2 .

فهي جملة مفتوحة في \mathbb{C}^2 و تصبح إما قضية صحيحة و إما خاطئة حسب قيم الثنائية (س ، ع) من \mathbb{C}^2 .

- الجملة المفتوحة تا (س ، ع) = ها (س ، ع) المعرفة في \mathbb{C}^2 أي :

$5س + 2ع + 1 = -س + ع$ (1).... (تسمى معادلة خطية من الدرجة الأولى بالمجهولين الحقيقيين س و ع) . ويطبق قواعد التحويل نجد :

$$(1) \Leftrightarrow 5س + 2ع + 1 = -س + ع$$

$$(1) \Leftrightarrow 6س + 2ع + 1 = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow ع = 6س - 1 \dots\dots\dots (2)$$

المعادلة (2) المكافئة للمعادلة (1) تبين أن كل ثنائية (س ، ع) من الشكل

(س ، 6س - 1) تحقق (1). نقول إن كل ثنائية من الشكل (س ، 6س - 1)

هي حل للمعادلة (1). هذا يعني أن المعادلة (1) تقبل عددا غير منته من الحلول

من الشكل (س ، 6س - 1) حيث س ∈ \mathbb{C}

فمثلا :

من أجل س = 1 تكون الثنائية (1 - 5) حلا للمعادلة (1) ، لأن

تا (1 - 5) = ها (1 - 5) بينما الثنائية (0 ، 1) ليست حلا للمعادلة (1)

لأنها ليست من الشكل (س ، 6س - 1)

- المعادلة (1) مكافئة للمعادلة 6س + ع = 1 التي هي من الشكل

أس + ب ع = ج حيث س و ع هما المجهولان

أ ، ب ، ج أعداد حقيقية معلومة (أ ≠ 0 و ب ≠ 0)

بصفة عامة :

كل معادلة من الشكل أس + ب ع = ج تسمى معادلة خطية من الدرجة الأولى

بمجهولين حقيقيين س ، ع ، حيث أ ، ب ، ج أعداد حقيقية معلومة

(أ ≠ 0 و ب ≠ 0) .

(2) جملة معادلتين خطيتين من الدرجة الأولى بمجهولين .

لتكن المعادلتان الخطيتان :

$$\text{أ س} + \text{ب ع} = \text{ج} \dots\dots (1)$$

$$\text{أ س} + \text{ب ع} = \text{ج} \dots\dots (2)$$

الوصل :

(أ س + ب ع = ج) \wedge (أ س + ب ع = ج) يسمى جملة خطية بالمجهولين

$$\left. \begin{array}{l} \text{أ س} + \text{ب ع} = \text{ج} \\ \text{أ س} + \text{ب ع} = \text{ج} \end{array} \right\} \text{س و ع ونكتب : (ج) } \dots\dots$$

حل هذه المعادلة في ح² هو إيجاد كل الثنائيات (س ، ع) من ح² التي تحقق المعادلتين (1) و (2) في آن واحد .

مثلاً : الثنائية (3 ، 4) من ح² تحقق كلا من المعادلتين

$$2 \text{ س} - \text{ع} = 5 \quad \text{و} \quad \text{س} - \text{ع} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ س} - \text{ع} = 5 \\ \text{س} - \text{ع} = 1 \end{array} \right\} \text{فهي حل للجملة}$$

- الثنائية (2 ، 1) من ح² تحقق المعادلة (1) ولكنها لا تحقق المعادلة (2) فهي ليست حلاً لتلك الجملة .

- الثنائية (1 ، 1) لا تحقق أيًا من المعادلتين (1) ، (2) ، فهي ليست حلاً لتلك الجملة .

(3) طرق حل جملة خطية

نقدم فيما يلي طرق حل جملة خطية من الدرجة الأولى .

لنحل الجملة الخطية التالية :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 2 \text{ س} - 3 \text{ ع} = 12 \\ (2) \quad 3 \text{ س} + \text{ع} = 7 \end{array} \right\} \dots\dots (ج)$$

. طريقة التعويض

تتمثل هذه الطريقة في تعيين أحد المجهولين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين و تعويضه في المعادلة الأخرى .

لدينا ما يلي :

$$(2) \quad \Leftrightarrow \text{ع} = 7 - 3 \text{ س} \dots\dots (3)$$

نعوض ع بقيمة (7 - 3 س) في المعادلة (1) فنجد :

$$12 = 2س - 3(7 - 3س) \Leftrightarrow 12 = 2س - 21 + 9س$$

$$12 = 11س - 21 \Leftrightarrow$$

$$21 + 12 = 11س \Leftrightarrow$$

$$33 = 11س \Leftrightarrow$$

$$\frac{33}{11} = س \Leftrightarrow$$

$$3 = س \Leftrightarrow$$

بتعويض س بقيمة 3 في معادلة (3) نجد :

$$ع = 3 - 7(3) \text{ أي } ع = -2$$

فحل الجملة (ج) هو الثنائية (3 ، -2)

ونكتب : مج = { (3 ، -2) } .

. طريقة الجمع :

نتمثل هذه الطريقة في حذف أحد المجهولين بالضرب في عدد ملائم و الجمع :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 12 = 3س - ع \\ (2) \quad 7 = 3س + ع \end{array} \right\} : (ج) \text{ لنحل الجملة السابقة}$$

لحذف المجهول ع ، نضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 3

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 12 = 3س - ع \\ (2) \quad 21 = 9س + ع \end{array} \right\} \Leftrightarrow (ج)$$

بالجمع نجد : $21 + 12 = (9س + ع) + (3س - ع)$

$$33 = (9س + ع) + (3س - ع)$$

$$33 = 11س$$

$$3 = س$$

ومنه :

ولحذف المجهول س نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد (-3) ونضرب

طرفي المعادلة (2) في العدد 2 ؛ فنجد :

$$\left. \begin{array}{l} 12 \times (-3) = (-3س + 36) \\ 7 \times 2 = (2س + 14) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (ج)$$

$$-36 = -9س + 6س$$

$$14 = 2س + 6س$$

\Leftrightarrow

وبالجمع نحصل على المعادلة :

$$14+36- = (6\text{ س}+2\text{ ع})+(9\text{ ع}+6\text{ س})$$

$$22- = (6\text{ س}+6\text{ س})+(9\text{ ع}+2\text{ ع}) \quad \text{أي}$$

$$22- = 11\text{ ع}$$

$$2- = \text{ع}$$

بتعويض قيمة ع في إحدى المعادلتين نجد $3 = \text{س}$

فالثانية (3 ، 2 -) هي حل للجملة (ج) ونكتب : $\{(3, -2)\}$ ملاحظة :

بعد تعيين قيمة المجهول س يمكن البحث عن قيمة المجهول ع بتعويض س بقيمته في إحدى معادلتَي الجملة .

• طريقة المحدد :

لتكن الجملة الخطية من الدرجة الأولى :

$$\left. \begin{aligned} \text{أ س} + \text{ب ع} &= \text{ج} \\ \text{آ س} + \text{ب̄ ع} &= \text{ج̄} \end{aligned} \right\} \text{ (ج) } \dots$$

تعتمد طريقة المحدد على العدد الحقيقي (أ ب̄ - أ ب) الذي يمثل بالجدول :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{آ} & \text{ب̄} \end{vmatrix} \quad \text{حيث أ و آ هما معاملان في الجملة (ج) و ب و ب̄ هما معاملان في}$$

نكتب :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{آ} & \text{ب̄} \end{vmatrix} = \text{أ ب̄} - \text{آ ب} .$$

حل الجملة (ج) يتوقف على محددها

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{آ} & \text{ب̄} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{فإن الجملة تقبل حلا وحيدا هو :}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{أ} \\ \text{ج} & \text{أ} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}} = \text{ع}$$

و

$$\frac{\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ب} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix}} = \text{س}$$

المقام هو المحدد الجملة

والبسط هو المحدد الناتج عن

تعويض ب ، ب بالعدين ج ، ج
على الترتيب .

المقام هو محدد الجملة

والبسط هو المحدد الناتج عن

تعويض أ ، أ بالعدين ج ، ج
على الترتيب .

• إذا كان $0 = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$ فإنه لا يمكن تعيين س و ع بطريقة المحدد لأن القسمة على 0 غير ممكنة .

وفي هذه الحالة تكون مجموعة الحلول إما غير منتهية وإما خالية .

مثال :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 12 = 3 - \text{ع} - 2\text{س} \\ (2) \quad 7 = \text{ع} + 3\text{س} \end{array} \right\} : \text{لنحل الجملة (ج) :}$$

$$\text{لدينا محدد الجملة (ج) : } \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (3 -) - 1 \times 2 = 11$$

$$3 = \frac{7 \times (3 -) - (12 \times 1)}{11} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -12 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{11} = \text{س} \quad \text{ومنه :}$$

$$2 - = \frac{3 \times 12 - 7 \times 2}{11} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{11} = \text{ع} \quad \text{و}$$

فحل الجملة (ج) هو (3، -2) أي مج = { (3، -2) } .

تلاحظ أن مجموعة حلول الجملة (ج) هي نفسها في جميع الطرق .

مثال 2 :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - \text{ع} = 2 \dots (1) \\ 5\text{س} - 5\text{ع} = 10 \dots (2) \end{array} \right\} : \text{لتكن الجملة (ج) :}$$

لدينا :

$$\text{محدد الجملة هو : } 0 = 5 \times (1) - 5 \times 1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

إذن مجموعة الحلول هي إما غير منتهية وإما المجموعة الخالية ϕ وبالتالي لا يمكن استعمال طريقة المحدد

$$\text{لاحظ أن : } (2) \Leftrightarrow 5(\text{س} - \text{ع}) = 10$$

$$(2) \Leftrightarrow \text{س} - \text{ع} = 2$$

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

بما أن $(1) \Leftrightarrow (2)$ فإن الجملة (ج) تؤول إلى المعادلة :

$$\text{س} - \text{ع} = 2$$

$$\text{ومنه } \text{ع} = \text{س} - 2$$

فمجموعة الحلول هي جميع الثنائيات من الشكل (س ، س-2) حيث س و ح وهي مجموعة غير منتهية أي :

$$\text{مج} = \{ (\text{س} , \text{ع}) \mid \text{ع} = \text{س} - 2 \}$$

مثال 3 : لتكن الجملة :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + 2\text{ع} = 1 \dots (1) \\ 2\text{س} + 4\text{ع} = 2 \dots (2) \end{array} \right\} : \text{(ج)}$$

$$\text{لدينا : محدد الجملة هو : } 0 = 4 - 4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

فمجموعة الحلول هي إما غير منتهية وإما المجموعة الخالية وبالتالي لا يمكن استعمال المحدد .

$$\text{لاحظ أن : } (2) \Leftrightarrow 2(\text{س} + 2\text{ع}) = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{س} + 2\text{ع} = 1$$

فلدينا :

$$\text{س} + 2\text{ع} = 1 \text{ و } \text{س} + 2\text{ع} = 1 \text{ وهذا تناقض .}$$

إذن لا يوجد أي ثنائية (س ، ع) تحقق الجملة (ج) . وبالتالي مجموعة الحلول هي المجموعة الخالية ϕ .

5. تطبيقات

(1) حل معادلة من الشكل : $\text{تا(س)} \times \text{ها(س)} = 0$
حيث كل من تا(س) و ها(س) هو كثير حدود من الدرجة الأولى .

نذكر بخاصية الجداء المعلوم : $\boxed{0 = \text{أ} \times \text{ب} \Leftrightarrow 0 = \text{أ} \text{ أو } 0 = \text{ب}}$
مثال 1 :

لنحل في ح المعادلة : $3 - \text{س} (5 - \text{س}) = 0$
حسب خاصية الجداء المعلوم لدينا :

$$3 - \text{س} (5 - \text{س}) = 0 \Leftrightarrow 3 - \text{س} = 0 \text{ أو } 5 - \text{س} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 = \text{س} \text{ أو } 5 = \text{س}$$

فمجموعة حلول المعادلة $3 - \text{س} (5 - \text{س}) = 0$ هي :

$$\text{مج} = \left\{ \frac{3}{5}, 0 \right\}$$

مثال 2 :

لنحل المعادلة : $4 - 2\text{س}^2 = (3 - \text{س})(2 - \text{س})$ (1)
لدينا :

$$(1) \Leftrightarrow (3 - \text{س})(2 - \text{س}) - (4 - 2\text{س}^2) = 0 \text{ , (نقل إلى الطرف الأول) .}$$

$$(1) \Leftrightarrow (3 - \text{س})(2 - \text{س}) - 4 + 2\text{س}^2 = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow (3 - \text{س})(2 - \text{س}) - 4 + 2\text{س}^2 = 0 \text{ (تحليل الطرف الأول حيث } 2\text{س}^2 - 1 = 0 \text{ هو العامل المشترك)}$$

$$(1) \Leftrightarrow (3 - \text{س})(2 - \text{س}) - 4 + 2\text{س}^2 = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow (3 - \text{س})(2 - \text{س}) - 4 + 2\text{س}^2 = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow 2\text{س}^2 - 1 = 0 \text{ أو } 3 - \text{س} = 0 \text{ (خاصية الجداء المعلوم)}$$

$$(1) \Leftrightarrow 2\text{س}^2 - 1 = 0 \text{ أو } 3 - \text{س} = 0$$

$$\text{إذن مج} = \left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$$

طريقة حل معادلة من الدرجة الأولى .

لحل معادلة من الشكل $\text{تا(س)} = \text{ها(س)}$ نتبع ما يلي .
(1) ننقل كل حدود الطرف الثاني إلى الطرف الأول .

$$0 = (س) = (س) - (س) \Rightarrow (س) = (س) - (س) = 0$$

$$(2) \text{ نحل } (س) - (س) = 0$$

(3) نطبق خاصية الجداء المعدوم :

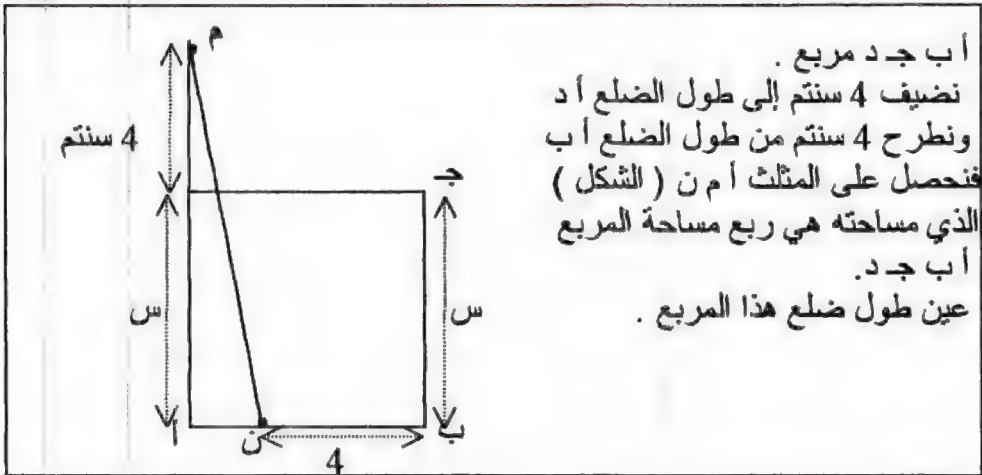
$$0 = (س) \Rightarrow 0 = (س) \text{ أو } 0 = (س)$$

ثم نحل هاتين المعادلتين البسيطتين

(4) نكتب الحلول بين حاضنتين

6. تمرين محلول

لنحل المسألة التالية



أ ب ج د مربع .
نضيف 4 سنتم إلى طول الضلع أ د
ونطرح 4 سنتم من طول الضلع أ ب
فنحصل على المثلث أ م ن (الشكل)
الذي مساحته هي ربع مساحة المربع
أ ب ج د .
عين طول ضلع هذا المربع .

منهجية حل المسألة :

حل مسألة يتطلب أربع مراحل هي :

1. إختيار المجهول أو المجاهيل .
2. ترجمة المسألة إلى معادلة
3. حل المعادلة .
4. مناقشة حلول المعادلة وإعطاء الجواب .

الحل :

1. إختيار المجهول :

نسمي س طول ضلع المربع أ ب ج د بالسنتم . بما أن س يمثل طولاً فإنه عدد حقيقي موجب وأكبر من 4 (لكي يمكن أن نطرح منه 4) .

إذن $س \in] 4 , +\infty [$.

2. ترجمة المسألة إلى معادلة :

• مساحة المثلث أ م ن هي : $\frac{أ م \times ن}{2} = \frac{(4 + س)(4 - س)}{2}$

• مساحة المربع أ ب ج د هي : أ ب × أ ب = س².

• نبحث عن س بحيث تكون مساحة المثلث أ م ن هي ربع مساحة المربع أ ب ج د .

ومنه المعادلة : $\frac{1}{4} س^2 = \frac{(4 + س)(4 - س)}{2}$

3. حل المعادلة :

لدينا $\frac{1}{4} س^2 = \frac{(4 + س)(4 - س)}{2}$... (1)

$\frac{1}{4} س^2 = \frac{16 - س^2}{2} \Leftrightarrow (1)$

$\left(\frac{1}{4} س^2\right) 4 = \frac{16 - س^2}{2} 4 \Leftrightarrow (1)$

$س^2 = (16 - س^2) 2 \Leftrightarrow (1)$

$0 = س^2 - 32 \Leftrightarrow (1)$

$0 = 32 - س^2 \Leftrightarrow (1)$

$0 = (32\sqrt{} - س^2) \Leftrightarrow (1)$

$0 = (32\sqrt{} + س) (32\sqrt{} - س) \Leftrightarrow (1)$

$0 = 32\sqrt{} + س$ أو $0 = 32\sqrt{} - س \Leftrightarrow (1)$

$32\sqrt{} = -س$ أو $32\sqrt{} = س \Leftrightarrow (1)$

$32\sqrt{4} = -س$ أو $32\sqrt{4} = س \Leftrightarrow (1)$

4. المناقشة والجواب .

بما أن س ∈ [4 ، +∞] فإن الحل الملائم للمسألة هو $32\sqrt{4}$.

إذن طول ضلع المربع أ ب ج د هو $32\sqrt{4}$ سنتم .

تمارين

• حل معادلة :

1. تحقق أن 1 هو حل للمعادلة :

$$2س^2 + 3س + 1 = 0$$

2. تحقق أن $\frac{1}{2}$ هو حل للمعادلة :

$$8س^2 - 2س - 3 = 0$$

3. تحقق أن $\frac{3}{4}$ هو حل للمعادلة :

$$4س^2 - 5س - 6 = 0$$

4. هل العدد $\frac{5}{3}$ هو حل للمعادلة :

$$3س^2 - 5س = 9س^2 + 2س ؟$$

• المعادلات من الدرجة الأولى :

5 حل ، في ح ، كلاً من المعادلات التالية :

$$(1) 0 = 4س - 1 ; 0 = 5س - 2 ; 0 = 1س - 1$$

$$(2) 0 = 3س ; 0 = -2س ; 0 = 6س + 1$$

$$(3) 0 = 1س + \frac{2}{3} ; 0 = \frac{1}{4} - \frac{س}{4} ; 0 = \frac{2}{5} - \frac{س}{5}$$

$$(4) \frac{1}{3} = \frac{س}{3} ; 0 = \frac{5}{2} - \frac{س^3}{4} ; 0 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} - \frac{س}{5}$$

6 حل ، في ح ، كلاً من المعادلات التالية :

$$(1) 9(2س - 14) = 8س - (2س - 5) - (12س - 2س)$$

$$(2) 8 - [(8س - 5) + (3س + 2)] = 2س - [7(2س - 9) + 10س]$$

$$(3) 12 - [7س - (9س - 8)] = 7س - [7س - (4س - 7)]$$

$$(4) 10(2س + 19) = 8(1س - 3) - (3س - 2)$$

$$(5) 4(5س - 1)^2 - 2(7س + 1)(1س - 2) = 2(8س - 3) + 14$$

7 حل ، في ح ؛ كلا من المعادلات التالية :

$$\frac{s^3}{5} + 6 = \frac{(s-1)^3}{4} \quad (1)$$

$$0 = 1 + \frac{5-s}{9} - \frac{7-s}{12} \quad (2)$$

$$\frac{s^2-5}{9} = \frac{s^2-3}{12} + \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{s^3}{5} = \frac{1-s}{15} + \frac{5-s}{6} \quad (4)$$

$$\frac{s^3-1}{28} = 4 + \frac{(5+s)^3}{7} \quad (5)$$

$$\frac{11}{21} = \frac{s+1}{14} + \frac{s+9}{6} \quad (6)$$

$$\frac{(1-s)^7}{4} = \frac{1+s}{12} + \frac{3}{2} + s \quad (7)$$

$$6 = \frac{1+s}{15} - \frac{\frac{1+s}{3} - 3}{4} \quad (8)$$

$$\left(\frac{s^7}{3} - \frac{1}{2}\right)\frac{2}{3} + (s^3-7)\frac{2}{15} = (4-s) - \left(\frac{2-s}{4} - 4\right)\frac{3}{5} \quad (9)$$

8 حل ، في ح ؛ كلا من المعادلات التالية :

$$0 = (1+s)(1-s)^2(3-s) - (1-s)(3-s)^2(8-s) \quad (1)$$

$$(2) \text{ س } (2+\text{س}) - (2+\text{س})^2 = -4 \text{ س}^2 .$$

$$(3) (2+\text{س})(5+\text{س}) = (1-\text{س}) \cdot 1^2 .$$

$$(4) (3+\text{س})^2 - (3+\text{س})^2 = 0^2 (3-\text{س}) .$$

$$(5) 4(3-\text{س}) = (3-\text{س})^2 .$$

$$(6) (9-\text{س}^2) \left(2 + \frac{\text{س}^3}{2} \right) - 6(3-\text{س}) = 0 .$$

$$(7) 3 \text{ س}^2 - \text{س} = 0 .$$

$$(8) 4 \text{ س}^2 - 3 \text{ س} = 0 .$$

$$(9) 5 \text{ س}^2 + \text{س} = 0 .$$

$$(10) 9 \text{ س} - \frac{\text{س}^2}{16} = 0 .$$

$$(11) 5 \frac{3}{5} \text{ س}^2 - \text{س} = 0 .$$

$$(12) 9 \text{ س}^2 - \frac{\text{س}}{4} = 0 .$$

$$(13) 4 - \text{س}^2 = 0 .$$

$$(14) 2 \text{ س} (1+\text{س}) = 4 + (1+\text{س}) .$$

$$(15) (1-\text{س})^3 = (1-\text{س})(1+\text{س})(1+\text{س}) .$$

• حل معادلة بمجهولين حقيقيين :

9 9 تحقق أن (2 ، -3) حل للمعادلة : $2 \text{ س} - 5 \text{ ع} = 9$

10 10 تحقق أن (5- ، -2) حل للمعادلة : $2 \text{ س}^2 - 3 \text{ ع}^3 = 74$

11 حل $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ حل للمعادلة : $4س - 2ع = 2س - 4ع + 3$.

12 تحقق أن $(-3, 2)$ حل مشترك للمعادلتين :

$2س + 5ع = 4$ و $-3س + 2ع = 13$.

الجميل الخطيية :

13 حل ، في ح² ، بطريقتي الجمع والتعويض الجملة التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 4س - ع = 5 \\ 10س - 2ع = 11 \end{array} \right\}$$

14 حل ، في ح² ، بطريقتي الجمع والمحدد الجملة التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 6س - ع = 17 \\ 3س - 2ع = 11 \end{array} \right\}$$

15 حل ، في ح² ، بطريقتي التعويض والمحدد الجملة التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 3س - ع = 4 \\ 5س - 2ع = 5 \end{array} \right\}$$

16 حل ، في ح² ، كلا من الجمل التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 6 = ع \frac{1}{3} - س \frac{11}{2} \\ 11 = ع \frac{2}{3} - س \frac{1}{2} \end{array} \right\} (2) \quad \left. \begin{array}{l} 1 = ع 3 + س 7 \\ 7 = ع 3 - س \end{array} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{6-10}{7} - \frac{4}{3} - 5س \\ 30 &= 2ع + 25س \end{aligned} \right\} (4) \quad \left. \begin{aligned} 28 &= ع + 5س \\ 20 &= \frac{2}{3}ع + \frac{9}{10}س \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{6-س}{7} &= \frac{ع+3س}{5} \\ \frac{6-س}{7} &= \frac{1-ع+2س}{3} \end{aligned} \right\} (5)$$

• المعادلات من الشكل تا(س) × ها(س) = 0 .

17] ليكن كثير الحدود ك(س) = س² + 4س - 5 .

1) تحقق أن ك(1) = 0 .

2) أتمم المساواة التالية : س² + 4س - 5 = (س-1)(.....) .

3) حل ، في ح ، المعادلة ك(س) = 0 .

18] ليكن كثير الحدود ك(س) = -س² + 3س + 4 .

1) تحقق أن ك(-1) = 0

2) أتمم المساواة التالية : -س² + 3س + 4 = (س+1)(.....) .

3) حل ، في ح ، المعادلة ك(س) = 0 .

19] لتكن كثيرات الحدود

تا₁(س) = س² - 9س + 8 ؛ تا₂(س) = -س² + س + 2

تا₃(س) = 3س² - 5س + 2 ؛ تا₄(س) = -3س² + 4س + 7

تا₅(س) = 5س² - 11س + 2 ؛ تا₆(س) = -س² - س - 6

1) تحقق أنّ أحد الأعداد - 1 ، 1 ، 2 ، - 2 هو جذر لأحد كثيرات الحدود هذه ؛
ثم استنتج تحليلاً لكل من كثيرات الحدود المفروضة

2) حل ، في ح ، كلا من المعادلات :

$$\begin{aligned} & \text{تا}_1(س) = 0 ؛ \text{تا}_2(س) = 0 ؛ \text{تا}_3(س) = 0 ؛ \text{تا}_4(س) = 0 ؛ \text{تا}_5(س) = 0 \\ & \text{تا}_6(س) = 0 . \end{aligned}$$

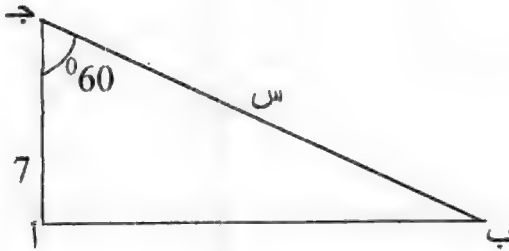
حل مسألة بمعادلة

20 إذا ضربنا عددا في $\frac{1}{2}$ فإنه ينقص بمقدار 3 . ما هو هذا العدد ؟

21 أ ب ج مثلث قائم في أ (الشكل)

(وحدة الطول هي السنتيمتر)

عيّن س بحيث يكون أ ج = 7



1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

. $a \leq b$ معناه $a - b \leq 0$

قارن بين كل من : - 7 و 5 ؛ - $\frac{1}{2}$ و - $\frac{1}{3}$ ؛ - $\frac{1}{4}$ و - $\frac{1}{5}$

نشاط 2 :

أتمم ما يلي :

$$a > 2 \Leftrightarrow a + 3 > \dots\dots\dots$$

$$b < 3 \Leftrightarrow b + 4 > \dots\dots\dots 12$$

$$b < 5 \Leftrightarrow b - \frac{1}{2} - \dots\dots\dots - \frac{5}{2}$$

نشاط 3 :

ليكن كثيرا الحدود للمتغير الحقيقي س :

$$\text{تا(س)} = 2 - \text{س} \quad \text{و} \quad \text{ها(س)} = \text{س} - 2$$

. تحقق أن :

$$\text{تا(س)} - \text{ها(س)} = \text{س} - 1$$

. من أجل $\text{س} \leq 1$ يكون $\text{تا(س)} \leq \text{ها(س)}$

. من أجل $\text{س} \geq 1$ يكون $\text{تا(س)} \geq \text{ها(س)}$

هذا يعني أن المتباينة $\text{تا(س)} \geq \text{ها(س)}$ لا تكون محققة في ح إلا إذا كان $\text{س} \geq 1$ فهي جملة مفتوحة معرفة في ح .

و تصبح قضية صحيحة إذا كان $\text{س} \in] - \infty , 1 [$ وقضية خاطئة إذا كان $\text{س} \in] 1 , + \infty [$

. الجملة المفتوحة $\text{تا(س)} \leq \text{ها(س)}$ تسمى متراجحة بالمجهول الحقيقي س .

. تا(س) و ها(س) هما طرفا هذه المتراجحة

. مجموعة قيم المتغير س التي تحقق المتراجحة تسمى مجموعة حلول هذه

المتراجحة .

مجموعة حلول المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) أي 2 - س ≤ 3 - س هي .
المجال $] 1 , +\infty]$

نكتب مج $] 1 , +\infty]$

. يمكن أن تعطى متراجحة بأحد الأشكال :

تا(س) < ها(س) ؛ تا(س) > ها(س) ؛ تا(س) ≥ ها(س) ؛ تا(س) ≤ ها(س)

2. المتراجحات في ح

1) عموميات

• تعاريف

. حل المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) في مجموعة ل هو إيجاد قيم العدد س من ل التي تحقق هذه المتراجحة .

. مجموعة هذه القيم تسمى مجموعة حلول المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) في المجموعة ل .

يمكن أن تكون ل إحدى المجموعات العددية المألوفة :

ط ، ص ، ك ، ح .

حل المتراجحة 2 - س ≤ 3 - س ذات المجهول الحقيقي س هو إيجاد مجموعة قيم س التي تحقق هذه المتراجحة .

• المتراجحات المتكافئة

نقول عن متراجحتين إنهما متكافئتان في مجموعة ل إذا كان لهما مجموعة الحلول نفسها في ل .

مثال :

لتكن المتراجحتان في ح :

$$3 \leq 12 \dots (1)$$

$$2 \leq 8 \dots (2)$$

كل عدد حقيقي أكبر من 4 أو يساوي 4 يحقق المتراجحتين (1) و (2) معا ،

إن المتراجحتان (1) و (2) مجموعة الحلول نفسها $] 4 , +\infty]$ فهما متكافئتان

$$نكتب \quad 3 \leq 12 \Leftrightarrow 2 \leq 8$$

2) تحويل المتراجحات

. تحويل متراجحة معرفة في ل هو إيجاد متراجحة مكافئة لها في ل

• قواعد تحويل المتراجحات :

مثمما رأينا في المعادلات ، لدينا القواعد العملية التالية :

قاعدة 1 :

نحصل على متراجحة مكافئة لمتراجحة مفروضة بنقل حد من طرف إلى آخر مع تغيير إشارته

$$\text{نكتب} \quad \text{تا}(س) \leq \text{ها}(س) \Leftrightarrow \text{تا}(س) - \text{ها}(س) \leq 0$$

مثال :

$$\begin{aligned} \text{المتراجحتان :} \quad س^2 < 1 - س \quad \text{و} \quad س^2 - س - 1 < 0 \quad \text{متكافئتان} \\ \text{و نكتب :} \quad س^2 < 1 - س \Leftrightarrow س^2 - س - 1 < 0 \end{aligned}$$

قاعدة 2 :

بضرب طرفي المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) في عدد حقيقي موجب تماماً α نحصل على المتراجحة المكافئة لها : α تا(س) ≤ α ها(س)

$$\text{ونكتب :} \quad [\text{تا}(س) \leq \text{ها}(س)] \Leftrightarrow \alpha \text{ تا}(س) \leq \alpha \text{ ها}(س) \quad \text{و} \quad 0 < \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{مثال :} \quad \text{المتراجحتان :} \quad س^2 + 1 < س \quad \text{و} \quad 3(س^2 + 1) < 3س \quad \text{متكافئتان} \\ \text{و نكتب :} \quad س^2 + 1 < س \Leftrightarrow 3(س^2 + 1) < 3س \end{aligned}$$

قاعدة 3 :

بضرب طرفي المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) في عدد سالب تماماً α نحصل على المتراجحة المكافئة لها : α تا(س) ≥ α ها(س)

$$\text{ونكتب :} \quad [\text{تا}(س) \leq \text{ها}(س) \quad \text{و} \quad 0 > \alpha] \Leftrightarrow \alpha \text{ تا}(س) \geq \alpha \text{ ها}(س)$$

مثال :

$$\text{المتراجحتان :} \quad س^2 + 1 \leq س \quad \text{و} \quad 5 - (س^2 + 1) \geq 5س \quad \text{متكافئتان}$$

(3) درجة متراجحة

لتكن المتراجحة تا(س) ≤ ها(س)
لدينا :

$$\text{تا}(س) \leq \text{ها}(س) \Leftrightarrow \text{تا}(س) - \text{ها}(س) \leq 0 \quad (\text{تطبيق القاعدة 1})$$

$$\Leftrightarrow ك(س) \leq 0 \quad (\text{فرق كثيري حدود هو كثير حدود})$$

$$\text{المتراجحتان تا}(س) \leq \text{ها}(س) \quad \text{و} \quad ك(س) \leq 0 \quad \text{متكافئتان}$$

فدرجة المتراجحة تا(س) ≤ ها(س) هي درجة كثير الحدود ك(س) المبسط .

مثال 1 :

المتراجحتان $3 - س \leq 1 - 2س$ و $5 - س \leq 4 + س$ متكافئتان .
كثير الحدود المبسط $4 + س$ هو من الدرجة الأولى .
وبالتالي فالمتراجحة $3 - س \leq 1 - 2س$ هي من الدرجة الأولى .

مثال 2 :

المتراجحتان $5س^2 > 2س^2 + س - 1$ و $3س^2 - س + 1 > 0$ متكافئتان .
كثير الحدود المبسط $3س^2 - س + 1$ هو من الدرجة الثانية ، فالمتراجحة $2س^2 > 2س^2 + س - 1$ هي من الدرجة الثانية .

2 . المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

لتكن المتراجحة في ح : $5 (س - 2) < 3 (س + 1) \dots (1)$
ولنبحث عن متراجحة مكافئة لها من الشكل $ك(س) < 0$
لدينا :

$$(1) \Leftrightarrow 5س - 10 < 3س + 3$$

$$(1) \Leftrightarrow 5س - 10 < 3س + 3$$

$$(1) \Leftrightarrow 2س < 13$$

المتراجحة $2س < 13$ المكافئة للمتراجحة (1) هي من الدرجة الأولى و من الشكل $أس + ب < 0$ حيث $أ$ و $ب$ عدنان حقيقيان .
ومنه :

كل متراجحة في ح تحول إلى أحد الأشكال :

$أس + ب \geq 0$ أو $أس + ب < 0$ أو $أس + ب > 0$ أو $أس + ب \leq 0$ هي

متراجحة من الدرجة الأولى بالمجهول $س$. $أ$ و $ب$ عدنان حقيقيان معلومان ، $أ \neq 0$
حل المتراجحة $أس + ب \geq 0$ في ح . نميز الحالات التالية :

$$(1) \text{ أ } < 0 : أس \geq ب \Leftrightarrow \frac{1}{أ} (أس) \geq \frac{1}{أ} ب \text{ (الضرب في العدد الموجب } \frac{1}{أ} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow س \geq \frac{ب}{أ}$$

مجموعة حلول المتراجحة $أس \geq ب$ هي $مج = [\frac{ب}{أ} , \infty [$

$$(2) \text{ أ } > 0 : أس \geq ب \Leftrightarrow \frac{1}{أ} (أس) \geq \frac{1}{أ} ب \text{ (الضرب في العدد السالب } \frac{1}{أ} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow س \leq \frac{ب}{أ}$$

مجموعة حلول المتراجحة $أس \geq ب$ هي $مج = \left[\frac{ب}{أ} , +\infty \right]$

(3) $أ = 0$: $أس \geq ب \Leftrightarrow 0 \geq ب$.
ومنه :

- إذا كان $ب \leq 0$ فإن $مج = ح$

- إذا كان $ب > 0$ فإن $مج = \emptyset$

نلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

الشروط	حلول المتراجحة $أس \geq ب$
$أ < 0$	$أس \geq \frac{ب}{أ}$ ، أي $مج = \left[\frac{ب}{أ} , +\infty \right]$
$أ > 0$	$أس \leq \frac{ب}{أ}$ ، أي $مج = \left[\frac{ب}{أ} , +\infty \right]$
$أ = 0$ و $ب \leq 0$	$مج = ح$
$أ = 0$ و $ب > 0$	$مج = \emptyset$

مثال 1 :

. حلّ ، في ح ، المتراجحة :

$$(1)..... \frac{س-7}{3} - \frac{5}{12} > \frac{5-س^3}{6} - \frac{3-س}{4}$$

بضرب طرفي المتراجحة (1) في المقام المشترك 12 نحصل على :

$$(1) \Leftrightarrow 3(س-7) - 5 > 2(5-س^3) - (3-س) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 3س - 21 - 5 > 10 - 2س^3 - 3 + س \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 3س - 26 > 7 - 2س^3 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 3س - 26 > 7 - 2س^3 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 7س > 24 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow س < \frac{24}{7} \quad (1) \text{ ومنه مجموعة حلول (1) هي : } مج = \left[\frac{24}{7} , +\infty \right]$$

مثال 2 :

. حلّ، في ح ، المتراجحة :

$$(1) \quad 15 > 3 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3}$$

بضرب طرفي المتراجحة (1) في المقام المشترك 6 نحصل على :

$$(1) \quad 1 \times 6 > (3) 6 + (3) 3 - (2) 2 \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad 90 > 18 + 9 - 4$$

$$(1) \quad 90 > 13$$

$$(1) \quad \frac{90}{13} >$$

ومنه مجموعة حلول (1) هي : $\text{مج} =] - \infty , \frac{90}{13} [$

3 . جملة متراجحتين من الدرجة الأولى

لتكن المتراجحتان من الدرجة الأولى

أ س + ب ≤ 0 (1) التي مجموعة حلولها مج₁

أ س + ب ≤ 0 (2) التي مجموعة حلولها مج₂

. الوصل (أ س + ب ≤ 0) \wedge (أ س + ب ≤ 0) يسمى جملة المتراجحتين (1) و (2)

ونكتب : (ج) $\left\{ \begin{array}{l} \text{أ س} + \text{ب} \leq 0 \dots (1) \\ \text{أ س} + \text{ب} \leq 0 \dots (2) \end{array} \right.$

. حل في ح هذه الجملة هو إيجاد كل قيم س التي هي حلول للمتراجحتين (1) و

(2) في آن واحد . فمجموعة حلول الجملة (ج) هي : $\text{مج} = \text{مج}_1 \cap \text{مج}_2$

مثال :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 3 - 3 > \frac{3}{2} + 2 \\ (2) \quad 1 - 3 < \frac{1 - 3}{2} \end{array} \right\} \text{ حلّ، في ح ، الجملة (ج) : (ج)}$$

. حلّ المتراجحة (1) :

بضرب طرفي (1) في العدد 2 نحصل على :

$$(1) \Leftrightarrow 4س + 3 > 2 - 6س$$

$$\Leftrightarrow 4س + 2س > 3 - 6س$$

$$\Leftrightarrow 6س > 3$$

$$\Leftrightarrow س > \frac{1}{2}$$

ومنه : $مج_1 =] \frac{1}{2}, \infty + [$

تمثيل مج₁ :



. حل المتراجحة (2)

بضرب طرفي (2) في العدد 2 نحصل على :

$$(2) \Leftrightarrow 2 < \left(\frac{3س - 1}{2} \right) 2$$

$$\Leftrightarrow 2س - 3س < 1 - 2س$$

$$\Leftrightarrow 3س - 2س < 1 + 2س$$

$$\Leftrightarrow س < 1$$

ومنه : $مج_2 =] \infty + , 1 - [$

تمثيل مج₂ :



فحل الجملة (ج) هو $مج = مج_1 \cap مج_2$

$$=] \infty + , 1 - [\cap] \frac{1}{2}, \infty + [$$

$$= مج] \frac{1}{2}, 1 - [$$

تمثيل مج :



4. تطبيقات

1) إشارة كثير الحدود تا (س) = أس + ب حيث $a \neq 0$

. أس + ب هو كثير حدود من الدرجة الأولى معرف في ح أي :

$$س \in]-\infty, +\infty[$$

لدينا : تا(س) = أس + ب

$$= أ (س + \frac{ب}{أ}) \text{ ومنه :}$$

. إذا كان س = - \frac{ب}{أ} فإن تا(س) = 0 و - \frac{ب}{أ} هو حل المعادلة تا(س) = 0

. إذا كان س < - \frac{ب}{أ} فإن س + \frac{ب}{أ} < 0 .

إذن إشارة الجداء أ (س + \frac{ب}{أ}) هي إشارة أ ، فإشارة تا(س) هي إشارة أ .

. إذا كان س > - \frac{ب}{أ} فإن س + \frac{ب}{أ} > 0 .

إذن إشارة الجداء أ (س + \frac{ب}{أ}) هي عكس إشارة أ ، فإشارة تا(س) هي إشارة (-أ)

نلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

س	$-\infty$	$-\frac{ب}{أ}$	$+\infty$
إشارة أس + ب	إشارة (-أ)	0	إشارة أ

ومنه :

إذا كان تا(س) = أس + ب حيث $a \neq 0$ فإن :

. تا(س) = 0 من أجل س = - \frac{ب}{أ}

. إشارة تا(س) هي إشارة أ من أجل س < - \frac{ب}{أ}

. إشارة تا(س) هي إشارة (-أ) من أجل س > - \frac{ب}{أ}

مثال 1 :

لندرس إشارة : تا (س) $3 - 2 = 0$
لدينا : تا (س) $0 = 3 - 2 \Leftrightarrow 0 = 3 - 2$

$$\frac{3}{2} = س \Leftrightarrow$$

والجدول التالي يبين إشارة $3 - 2$

س	$\infty -$	$\frac{3}{2}$	$\infty +$
إشارة $3 - 2$	—	0	+

مثال 2 :

لندرس إشارة : تا (س) $5 - 4 = 0$
لدينا : تا (س) $0 = 5 - 4 \Leftrightarrow 0 = 5 - 4$

$$\frac{4}{5} = س \Leftrightarrow$$

الجدول التالي يبين إشارة تا (س) :

س	$\infty -$	$\frac{4}{5}$	$\infty +$
إشارة $5 - 4$	+	0	—

2) إشارة جذاء عوامل من الدرجة الأولى .

قاعدة :

لدراسة إشارة كثير حدود تا (س) نحلل تا (س) ثم نطبق قاعدة إشارة جذاء .

مثال 1 :

لندرس إشارة تا(س) حيث :

$$\text{تا(س)} = -3 \text{ س} (1 + \text{س}) (2 - 6 \text{ س})$$

. لنبحث عن حلول المعادلة $0 = \text{تا(س)}$

$$0 = \text{تا(س)} \Leftrightarrow 0 = -3 \text{ س} (1 + \text{س}) (2 - 6 \text{ س})$$

$$0 = \text{تا(س)} \Leftrightarrow 0 = -3 \text{ س} \text{ أو } 0 = 1 + \text{س} \text{ أو } 0 = 2 - 6 \text{ س}$$

$$0 = \text{تا(س)} \Leftrightarrow 0 = \text{س} \text{ أو } -1 = \text{س} \text{ أو } 3 = \text{س}$$

جدول إشارة تا(س) :

س	$-\infty$	$1-$	0	3	$+\infty$
إشارة -3 س	+	+	0	-	-
إشارة $1 + \text{س}$	-	0	+	+	+
إشارة $2 - 6 \text{ س}$	+	+	+	0	-
إشارة تا(س) = $-3 \text{ س} (1 + \text{س}) (2 - 6 \text{ س})$	-	0	+	-	0

الجدول يبين أن .

$$\text{تا(س)} > 0 \text{ من أجل : } \text{س} \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$$

$$\text{تا(س)} < 0 \text{ من أجل : } \text{س} \in]-1, 0[\cup]0, 3[$$

$$\text{تا(س)} = 0 \text{ من أجل : } \text{س} = -1 \text{ أو } 0 \text{ أو } 3$$

مثال 2 :

لندرس إشارة تا(س) حيث :

$$\text{تا(س)} = (8 - \text{س}) (3 - \text{س}) - (6 \text{ س} + 1) (2 - 16 \text{ س})$$

. نحلل تا(س) :

$$\text{تا(س)} = (8 - \text{س}) (3 - \text{س}) - (6 \text{ س} + 1) (2 - 16 \text{ س})$$

$$= (8 - \text{س}) (3 - \text{س}) + 2 (6 \text{ س} + 1) (8 - \text{س})$$

$$= (8 - \text{س}) [(3 - \text{س}) + 2 (6 \text{ س} + 1)]$$

$$= (8 - \text{س}) (5 + 11 \text{ س})$$

$$\begin{aligned} & \text{تا(س)} = (8 - \text{س}) \cdot (11 + \text{س}) \\ & \text{. نبحث عن حلول المعادلة تا(س) = 0} \\ & \text{تا(س)} = 0 \Leftrightarrow 0 = 8 - \text{س} \text{ أو } 0 = 11 + \text{س} \\ & \text{تا(س)} = 0 \Leftrightarrow 8 = \text{س} \text{ أو } -\frac{5}{11} = \text{س} \end{aligned}$$

. جدول إشارة تا(س) :

س	$-\infty$	$-\frac{5}{11}$	8	$+\infty$
إشارة 8-س	+	+	0	-
إشارة 11-س	-	0	+	+
إشارة تا(س)	-	0	+	-

الجدول يبين أن :

$$\text{تا(س)} > 0 \text{ من أجل س } \in]-\infty, -\frac{5}{11}[\cup]8, +\infty[$$

$$\text{تا(س)} < 0 \text{ من أجل س } \in]-\frac{5}{11}, 8[$$

$$\text{تا(س)} = 0 \text{ من أجل س } = -\frac{5}{11} \text{ أو } 8$$

5. تمرين محلول

ليكن كثيرا الحدود : تا(س) = $5 - 5س^2 + 26س - 5$

ها(س) = $25س^2 - 1$

1. تحقق أن تا(5) = 0 ثم استنتج تحليلا لكثير الحدود تا(س) .

2. عين قيم س التي من أجلها يكون تا(س) \leq ها(س)

الحل :

(1) تحليل تا(س) :

لدينا : تا(س) = $5 - 5س^2 + 26س - 5$

$$\text{تا(5)} = (5 - 5) \times 26 + 5 \times 5 - 5 = 0$$

$$0 = 130 + 130 - 5 =$$

يما أن تا(س) ينعدم من أجل س = 5 فإن تا(س) يقبل القسمة على س - 5

ومنه : تا(س) = (س - 5) (أ س + ب)

$$= أ س^2 + (ب - 5 أ) س - 5 ب$$

وبمطابقة عبارتي تا(س) نحصل على :

$$\left. \begin{array}{l} 5- = 1 \\ 1 = 5- \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (1) \quad 5- = 1 \\ (2) \quad 26 = 15- \\ (3) \quad 5- = 5- \end{array} \right\}$$

5- و 1 يحققان (2)

إذن تا(س) = (س - 5) (5- س + 1)
(2) قيم س المطلوبة هي مجموعة حلول المترابحة

تا(س) ≤ ها(س) في ح .

$$\text{لدينا : تا(س) ≤ ها(س) } \Leftrightarrow 5- \leq 26 + 5- \leq 25 \leq 1 - 2 \quad \text{تا(س) ≤ ها(س) } \Leftrightarrow (5- \leq 26 + 5- \leq 25) - (5- \leq 26 + 5- \leq 25) \leq 0$$

$$\text{تا(س) ≤ ها(س) } \Leftrightarrow (5- \leq 26 + 5- \leq 25) - (5- \leq 26 + 5- \leq 25) \leq 0 \quad \text{تا(س) ≤ ها(س) } \Leftrightarrow (5- \leq 26 + 5- \leq 25) - (5- \leq 26 + 5- \leq 25) \leq 0$$

$$\text{تا(س) ≤ ها(س) } \Leftrightarrow (5- \leq 26 + 5- \leq 25) - (5- \leq 26 + 5- \leq 25) \leq 0 \quad \text{تا(س) ≤ ها(س) } \Leftrightarrow (5- \leq 26 + 5- \leq 25) - (5- \leq 26 + 5- \leq 25) \leq 0$$

$$\text{تا(س) ≤ ها(س) } \Leftrightarrow (5- \leq 26 + 5- \leq 25) - (5- \leq 26 + 5- \leq 25) \leq 0 \quad \text{تا(س) ≤ ها(س) } \Leftrightarrow (5- \leq 26 + 5- \leq 25) - (5- \leq 26 + 5- \leq 25) \leq 0$$

$$\text{تا(س) ≤ ها(س) } \Leftrightarrow (5- \leq 26 + 5- \leq 25) - (5- \leq 26 + 5- \leq 25) \leq 0 \quad \text{تا(س) ≤ ها(س) } \Leftrightarrow (5- \leq 26 + 5- \leq 25) - (5- \leq 26 + 5- \leq 25) \leq 0$$

$$\text{لندرس إشارة الجداء : ل = (5- س + 1) (6- س) } \quad \text{لندرس إشارة الجداء : ل = (5- س + 1) (6- س)}$$

$$0 = \text{ل} \Leftrightarrow [0 = 1 + 5- \text{س} \quad \text{أو} \quad 0 = 6 - 5\text{س}]$$

$$0 = \text{ل} \Leftrightarrow \left[\frac{2}{3} = \text{س} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{5} = \text{س} \right]$$

جدول إشارة ل :

س	∞ -	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	∞ +
إشارة 5-س+1	+	0	-	-
إشارة 6-س-4	-	-	0	+
إشارة (5-س+1)(6-س-4)	-	0	+	0

نستنتج من جدول الإشارة أن :

$$\text{تا(س) ≤ ها(س) من أجل س } \in \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{5} \right]$$

$$\text{أي أن المترابحة تا(س) ≤ ها(س) محققة من أجل } \frac{2}{3} \geq \text{س} \geq \frac{1}{5}$$

تمارين

. المتراجحات في ح :

1 هل المتراجحتان الآتيتان متكافئتان ؟

$$(1) \quad 4س - 2س^2 > 2س^3 + 4س \quad \text{و} \quad 2س^2 - 2س + 1 \geq 2س^2 + 2$$

2 حل المتراجحات التالية :

$$\begin{array}{ll} (1) & 4س - 7 < 0 \\ (3) & 5س + 4 \leq 0 \\ (5) & 5س - 0 < 0 \\ (7) & 14س - 5 < 0 \\ (9) & 4س - 3 < 6س + 1 \\ (2) & 5س - 3 > 0 \\ (4) & 7س - 2 > 0 \\ (6) & 3س + 2 < 0 \\ (8) & 6س + 18 > 0 \\ (10) & 2س(3س - 1) \leq 8س \end{array}$$

3 حل المتراجحات التالية :

$$\begin{array}{ll} (1) & 3س + 2(3س - 1) < \frac{1س - 1}{2} \\ (3) & \frac{5(4س - 1)}{5} > \frac{5(س - 1)}{4} + \frac{7}{2} \\ (5) & \frac{5س + 5}{3} - 2 < \frac{(3س - 2)7}{12} - \frac{(3س - 4)}{4} \\ (6) & \frac{5س - 5}{4} - 6 \leq \frac{5س - 3}{12} + \frac{1س - 4}{6} \\ (7) & \frac{7س - 4}{8} \geq \frac{(س - 5)2}{16} + 4س \end{array}$$

4 حل المتراجحات التالية :

$$(1) \quad 0 < (س - 1) \quad (2) \quad (س - 2) (3 - 5) > 0$$

$$(3) \quad 0 \geq (س + 2) (1 - س) \quad (4) \quad 0 \leq (س - 2) (س + 3)$$

$$(5) \quad 0 < (س + 6) (5 - س) \quad (6) \quad 0 > (س + \frac{2}{3}) (\frac{1}{2} - س)$$

$$(7) \quad (س - 3) (س + 1) > (س - 7) (س - 1)$$

$$(8) \quad \frac{2(س - 1)(س + 1)}{3} > \frac{(س - 5)(س - 2)}{3}$$

$$(9) \quad س^2 - 1 > س^2 - 2س + 1$$

$$(10) \quad 0 < (س^4 - 81) (س^2 - 25)$$

$$(11) \quad 0 < (س^2 - 9) (س - 1)^2$$

$$(12) \quad 0 > (س + 2) (س - 4) (س - 5)$$

$$(13) \quad (س - 2) (س - 1)^2 > (س - 2) (س - 1)^2$$

$$(14) \quad (س^2 - 4) (س^2 - 9) > (س^2 - 6) (س^2 - 3)$$

5 ادرس إشارة كل من العبارات التالية .

$$(1) \quad 3س - 4 \quad ; \quad 2س + 2 \quad ; \quad 4س^2 - 1$$

$$(4) \quad \frac{س^2 - 2}{3} \quad ; \quad 5 - 4س - \frac{س}{2} \quad ; \quad 6 - \frac{س^2}{3} (س - 1)$$

$$(7) \quad (س - 1) (س - 1) \quad ; \quad (8) \quad (س + 2) (س^2 - 4)$$

$$(9) \quad س - (س - 1) \quad ; \quad (10) \quad (س - 4) (س - 5) (س - 7)$$

$$(11) \quad س^2 + 3 \quad ; \quad (12) \quad (س + 3) (س + 4)^2$$

$$(13) \quad |س + 1| \quad ; \quad (14) \quad |س - 3|$$

$$(15) \quad |س - 5| \quad ; \quad (16) \quad 4 - (س + \frac{س}{3})^2$$

6. حل في ح جمل المتراجحات التالية :

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} 2س + 3 < س \\ 4س - 5 < س \end{array} \right\} \quad (2) \quad \left. \begin{array}{l} 2س + 3 > 2 \\ 4س - 5 > 2س \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 < 1 + 2s \\ 3 < 7 + 2s \end{array} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5-s}{3} < 3 + \frac{1-s}{2} \\ \frac{s-4}{2} < 1-s \end{array} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < (1-s)3 + (2-s)5 \\ 1-2s > (2+s)4 + 3-s \end{array} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq 1-3s \\ 5-3s > 2s \end{array} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s}{2} < 5-3s \\ 3+2s > 7-s \end{array} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 > 1+2s- \\ \frac{5-s}{3} < (1+s)2-s \end{array} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 > (2+s)\frac{3}{2} - (5-s)2 \\ 0 < (s-4)\frac{3}{5} - (2-s)\frac{1}{4} \end{array} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} 5- < (2-s)s - (3+s)s \\ 26- < (2-s)3s - (5-s)3s \end{array} \right\} (10)$$

! أنشطة تمهيدية

نشاط !

- أ ، ب ، ج نقط من المستوي ليست على استقامة واحدة .
 • أنشئ النقطة د بحيث يكون أ ب ج د متوازي أضلاع .
 نقول إن الثنائيتين (أ ، د) و (ب ، ج) متسايرتان .
 ويمثلان شعاعاً نرسم إليه بالرمز $\overrightarrow{أد}$ أو $\overrightarrow{بج}$ أو $\overrightarrow{ش}$.

نكتب : $\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{أد}$ أو $\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{بج}$

- الكتابة $\overrightarrow{أد}$ تعني تجاوزاً ، الشعاع الممثل بالثنائية النقطية (أ ، د) .



$\overrightarrow{أب}$ و $\overrightarrow{بج}$ شعاعان

- أنشئ الشعاع $\overrightarrow{ش}$ بحيث :

$$\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}$$

- أنشئ النقطة د بحيث : $\overrightarrow{أد} = \frac{1}{2} \overrightarrow{أج}$

- أنشئ النقطة هـ بحيث : $\overrightarrow{أهـ} = - \overrightarrow{أب}$.

2. الأشعة

(أ) الأشعة المتساوية :

كل شعاع \overleftrightarrow{AB} يتعين بما يلي :

- منحاه : هو منحنى المستقيم (AB)

- إتجاهه : من A إلى B

- طويلته : هي طول القطعة [AB]

• نرمز إلى طويّلة الشعاع \overleftrightarrow{AB} بالرمز $\| \overleftrightarrow{AB} \|$

ونكتب $\| \overleftrightarrow{AB} \| = \| \overleftrightarrow{AB} \|$.

نقول عن شعاعين إنهما متساويان إذا كان لهما نفس المنحنى ونفس الإتجاه ونفس الطويّلة .

مثال :

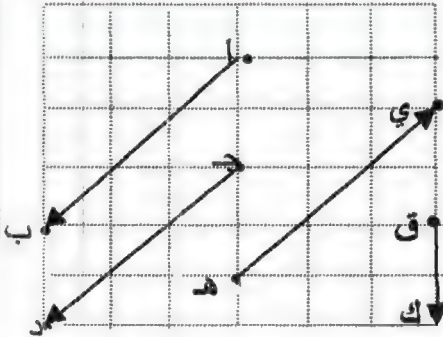
في الشكل :

\overleftrightarrow{AB} و \overleftrightarrow{CD} لهما نفس المنحنى

و نفس الإتجاه ونفس الطويّلة

ونكتب :

$$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$$



لاحظ أن : $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$ معناه AB و CD متوازي أضلاع.

• \overleftrightarrow{AB} و \overleftrightarrow{DE} لهما نفس المنحنى ونفس الطويّلة وهما متعاكسان في الإتجاه

فهما غير متساويين .

• \overleftrightarrow{AB} و \overleftrightarrow{CE} مختلفان في المنحنى وفي الإتجاه وفي الطويّلة فهما غير متساويين .

• كل ثنائية نقطية من الشكل (A, A) تمثل الشعاع المعلوم ونكتب $\overleftrightarrow{AA} = 0$

طويّلة الشعاع المعلوم هي 0 ومنحاه غير معين .

3. الجمع الشعاعي

(1) علاقة شال :

أوجد نقطتان .

مهما كانت النقطة ب لدينا :

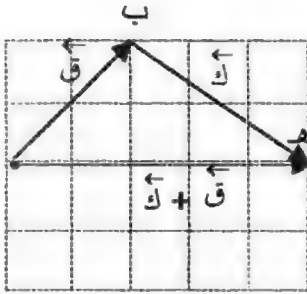
$$\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}$$

الشعاع $\overrightarrow{أج}$ هو مجموع الشعاعين $\overrightarrow{أب}$ و $\overrightarrow{بج}$.

لاحظ أن نهاية (أ ، ب) هي بداية (ب ، ج) .

(2) مجموع شعاعين :

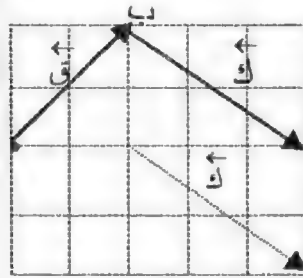
ليكن : $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{أب}$ و $\overrightarrow{ك} = \overrightarrow{أد}$. لنعين $\overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ك}$:



(3) بما أن :

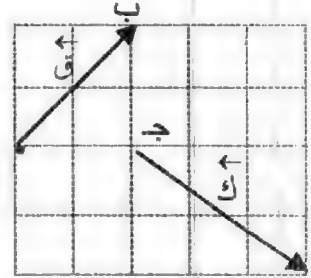
$$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بـهـ} = \overrightarrow{أهـ}$$

$$\overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ك} = \overrightarrow{أهـ}$$



(2) ننشئ الشعاع

$$\overrightarrow{بـهـ} = \overrightarrow{ك}$$



(1) د

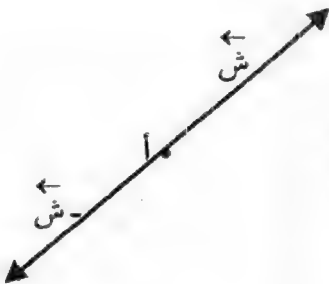
. الشعاع المعاكس لشعاع :

ليكن الشعاع $\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{أب}$

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بأ}$$

يسمى الشعاع $\overrightarrow{بأ}$ الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{أب}$

$$\overrightarrow{ش} = - \overrightarrow{أب} = - \overrightarrow{ش}$$



(3) قاعدة متوازي الاضلاع

إذا كان :

$$\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{أب} \quad ; \quad \overrightarrow{ك} = \overrightarrow{أج}$$

$$\text{فإن : } \overrightarrow{أد} = \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ك}$$

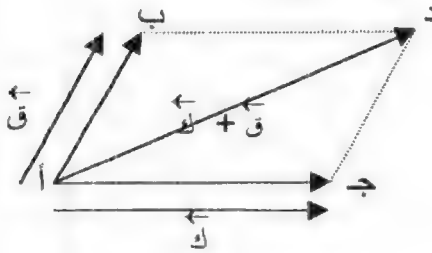
حيث أب د ج متوازي اضلاع .

أمثلة :

. لإنشاء مجموع شعاعين $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ك}$ نختار نقطة مثل أ ثم ننشئ متوازي

الاضلاع أب د ج بحيث $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ق}$ و $\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{ك}$ فيكون :

$$\overrightarrow{أد} = \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ك}$$



. إيجاد الفرق $\overrightarrow{ق} - \overrightarrow{ك}$:

لدينا : $\overrightarrow{جـد} = \overrightarrow{ق}$

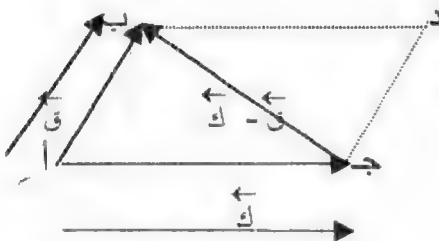
$$\text{و } \overrightarrow{دب} = \overrightarrow{جـا} = \overrightarrow{أج} - \overrightarrow{ك} = \overrightarrow{ق} - \overrightarrow{ك}$$

إذن :

$$\overrightarrow{ق} - \overrightarrow{ك} = \overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أد}$$

$$\overrightarrow{ق} - \overrightarrow{ك} = \overrightarrow{ق} - \overrightarrow{جـد} = \overrightarrow{دب}$$

$$\overrightarrow{ق} - \overrightarrow{ك} = \overrightarrow{كـب}$$



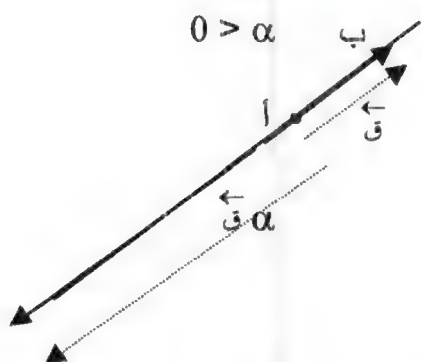
ملاحظة : إذا كان للشعاعين $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ك}$ نفس المنحى نستعمل علاقة شال لإيجاد مجموعهما .

4. ضرب شعاع بعدد

(1) تعريف

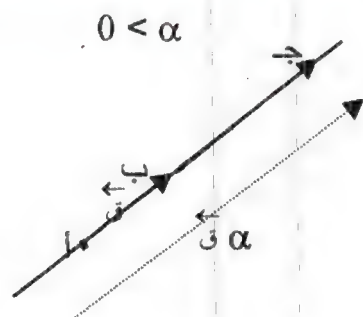
ليكن \vec{s} شعاعا غير معدوم و α عددا حقيقيا غير معدوم
جداء الشعاع \vec{s} و العدد α هو الشعاع $\alpha \vec{s}$ بحيث :
 $\alpha \vec{s}$ و \vec{s} لهما نفس المنحى .
 إذا كان $0 < \alpha$ فإن $\alpha \vec{s}$ و \vec{s} لهما نفس الإتجاه ،
 وإذا كان $0 > \alpha$ فإن $\alpha \vec{s}$ و \vec{s} لهما اتجاهان متعاكسان
 . طوليلة الشعاع $\alpha \vec{s}$ هي الجداء $|\alpha| |\vec{s}|$.

ليكن $\vec{q} = \vec{ab}$ و $\vec{q} \alpha = \vec{aj}$



ب و ج من جهتين مختلفتين بالنسبة
إلى النقطة أ

$$\vec{aj} = \alpha \vec{ab} = |\alpha| \vec{ab} \quad (0 < \alpha)$$



ب و ج من جهة واحدة بالنسبة إلى
النقطة أ

$$\vec{aj} = \alpha \vec{ab} = |\alpha| \vec{ab} \quad (0 > \alpha)$$

حالة خاصة

نصطلح على أن : $0 \vec{s} = \vec{0}$ ، $\alpha \vec{0} = \vec{0}$.

إذا كان $\alpha \vec{s} = \vec{0}$ فإن $0 = \alpha$ أو $0 = \vec{s}$.

مثال :

أب شعاع ←

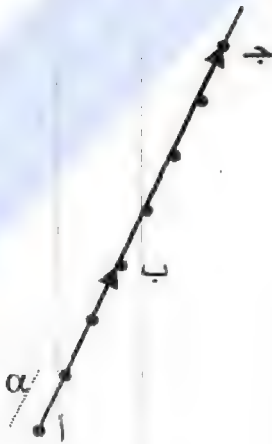
. لننشئ الشعاع جـ ← بحيث :

$$\overleftarrow{أب} = \frac{7}{3} \overleftarrow{أج}$$

نقسم القطعة [أب] إلى ثلاثة أجزاء متساوية وليكن $أب = 3\alpha$

ثم ننشئ النقطة جـ من [أب] بحيث :

$$أج = 7\alpha \text{ فيكون : } \overleftarrow{أج} = \frac{7}{3} \overleftarrow{أب}$$



. د نقطة و أب شعاع ←

لننشئ الشعاع دـ ← بحيث

$$\overleftarrow{دـ} = \frac{5}{2} \overleftarrow{أب}$$

. نفرض دـجـ = أب . لنقسم

القطعة [دـجـ] إلى جزئين متساويين

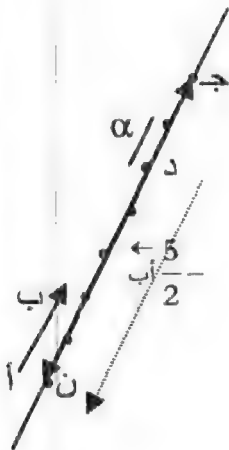
وليكن دـجـ = 2\alpha

. نعين النقطة نـ من (دـجـ) بحيث :

. دـنـ ، دـجـ لهما اتجاهان متعاكسان

. دـنـ = 5\alpha

$$\text{فيكون : } \overleftarrow{دـنـ} = \frac{5}{2} \overleftarrow{أب}$$



(2) بعض قواعد الحساب الشعاعي

نستعمل ، في الحساب الشعاعي القواعد التالية :

α و β عدنان حقيقيان .

$\overleftarrow{ق}$ و $\overleftarrow{ك}$ شعاعان

لدينا : $\overleftarrow{ق} \alpha + \overleftarrow{ك} \alpha = \overleftarrow{(ق + ك)} \alpha$

$\overleftarrow{ق} (\beta \alpha) = (\overleftarrow{ق} \beta) \alpha$

$\overleftarrow{ق} (\beta + \alpha) = \overleftarrow{ق} \beta + \overleftarrow{ق} \alpha$

أمثلة :

$\overleftarrow{أب} 3 + \overleftarrow{بج} 3 = \overleftarrow{(أب + بج)} 3$

$\overleftarrow{أج} 3 =$ (علاقة شال)

$\overleftarrow{أب} \left(\frac{5}{2} \times 2 \right) = \left(\overleftarrow{أب} \frac{5}{2} \right) 2$

$\overleftarrow{أب} 5 =$

$\overleftarrow{أب} 4 - \overleftarrow{أب} 6 = \overleftarrow{أب} (6 - 4)$

$\overleftarrow{أب} 2 = -$

(3) الأشعة المتوازية

تعريف :

$\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ك}$ شعاعان

نقول إن $\overleftarrow{ق}$ يوازي $\overleftarrow{ك}$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α

بحيث يكون : $\overleftarrow{ق} = \alpha \cdot \overleftarrow{ك}$

نرمز لتوازي الشعاعين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ك}$ بالرمز $\overleftarrow{ق} // \overleftarrow{ك}$

بما أن $0 = \overleftarrow{0}$. $\overleftarrow{ق}$ فإن الشعاع المعلوم يوازي أي شعاع

كل شعاعين غير معدومين ولهما نفس المنحى ، هما متوازيان .

$\overleftarrow{أب} // \overleftarrow{جد} \Leftrightarrow \overleftarrow{(أب)} // \overleftarrow{(جد)}$

مثال : أ ب ج د شبه منحرف (الشكل) .

$$أ ب = 3 , ج د = 4$$

بما أن (أ ب) // (ج د)

فإن الشعاعين أ ب و ج د متوازيان .

أي يوجد عدد حقيقي α بحيث

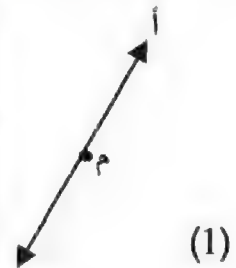
$$\overrightarrow{أ ب} = \alpha \overrightarrow{ج د}$$

$$أ ب = 3 . \left(\frac{1}{4} ج د \right) = \frac{3}{4} ج د . أ ب و ج د لهما إتجاهان متعاكسان إذن :$$

$$أ ب = 3 . \left(- \frac{1}{4} ج د \right) = - \frac{3}{4} ج د$$

4 | منتصف قطعة مستقيمة

م منتصف القطعة [أ ب] معناه :



(1)



(2)

$$\overrightarrow{أ م} = \overrightarrow{م ب}$$

$$\overrightarrow{أ م} = \frac{1}{2} \overrightarrow{أ ب}$$

$$\overrightarrow{أ ب} = 2 \overrightarrow{أ م}$$

(3)

$$\overrightarrow{أ م} + \overrightarrow{م ب} = \overrightarrow{0}$$

أ م و م ب متعاكسان

5. المعلم الخطي

(ق) مستقيم ، وشعاع غير معدوم منحاه هو منحنى (ق) .
الثنائية (ق ، و) تسمى محورا .

- المستقيم (ق) هو حامل المحور (ق ، و) .
- الشعاع و يسمى شعاع الوحدة للمحور (ق ، و) (ق)
- ويسمى أيضا أساسا للمستقيم (ق) .

(ق) مستقيم ، م و أنقطتان منه .

و شعاع بحيث : $\overrightarrow{و} = \overrightarrow{م أ}$.

- الثنائية (م ، و) تسمى معلما للمستقيم (ق)

- النقطة م تسمى مبدأ المعلم (م ، و)

- الشعاع و يسمى شعاع الوحدة للمعلم (م ، و)

(م ، و) معلم للمستقيم (ق)

ن نقطة من (ق)

الشعاعان و ، $\overrightarrow{م ن}$ متوازيان .

إذن يوجد عدد حقيقي س بحيث : $\overrightarrow{م ن} = \overrightarrow{س . و}$

العدد س يسمى فاصلة النقطة ن بالنسبة إلى المعلم (م ، و)

القياس الجبري للشعاع :

من أجل كل نقطتين أ و ب من المستقيم (ق) يكون الشعاع $\overrightarrow{أب}$ موازيا للشعاع

$\overrightarrow{و}$ ، إذن :

يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث :

$$\overrightarrow{أب} = \alpha \overrightarrow{و}$$

العدد α يسمى القياس الجبري للشعاع $\overrightarrow{أب}$ بالنسبة للمعلم

(م ، و) ونرمز إليه بالرمز $\overrightarrow{أب}$.

تعريف :

(ق ، و) محور ، أ ، ب نقطتان من (ق)

القياس الجبري للشعاع $\overrightarrow{أب}$ هو العدد الحقيقي $\overrightarrow{أب}$ بحيث :

$$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{و}$$

6 . تطبيقات

1) علاقة شال الجبرية

أ ، ب ، ج ثلاث نقط من مستقيم مزود بمعلم (م ، و)

$$\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}$$

بالقياسات الجبرية كما يلي :

$$\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}$$

التعبير عن $\overrightarrow{أب}$ بدلالة س_أ و س_ب :

في المعلم (م ، و) فاصلة النقطة أ هي س_أ و فاصلة النقطة ب هي س_ب .

$$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مب}$$

(علاقة شال)

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{O}$$

إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$ (فاصلة النهاية - فاصلة البداية)

(2) فاصلة منتصف قطعة مستقيمة :

(م، و) معلم للمستقيم (ق).

أ، ب نقطتان من (ق).

لنبحث عن س، فاصلة النقطة ه منتصف القطعة [أ، ب]

لدينا : ه منتصف [أ، ب] $\Leftrightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$

$$\Leftrightarrow 0 = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = -(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HS} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$$

ومنه :

$\overrightarrow{HS} = \frac{\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}}{2}$

7. تمرين محلول

أ ب ج د متوازي أضلاع .
النقطتان هـ و ي هما على الترتيب منتصفا الضلعين [ب ج] و [د ج] .
برهن أن :

$$1. \overrightarrow{أ ح} + \overrightarrow{ب د} = 2 \overrightarrow{ب ج}$$

$$2. \overrightarrow{أ هـ} + \overrightarrow{أ ي} = \frac{3}{2} \overrightarrow{أ ح}$$

3. بين أن الشعاعين هـ ي و ب د متوازيان .

الحل :

نترجم المعطيات بالشكل المجاور .
1. للبرهان على المساواة :

$$\overrightarrow{أ ح} + \overrightarrow{ب د} = 2 \overrightarrow{ب ج}$$

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{أ ح} = \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ج} \dots (1)$$

$$\text{و } \overrightarrow{ب د} = \overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ د} \dots (2)$$

بالجمع نجد :

$$\overrightarrow{أ ح} + \overrightarrow{ب د} = (\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ج}) + (\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ د})$$

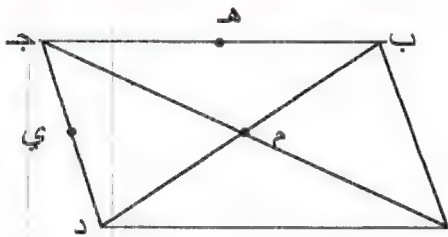
$$= \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ج} + (\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ د}) =$$

$$= \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ج} + \overrightarrow{أ د} =$$

$$= \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ج} + \overrightarrow{أ د} =$$

$$\overrightarrow{أ ح} + \overrightarrow{ب د} = \overrightarrow{ب ج} + \overrightarrow{ب ج} = 2 \overrightarrow{ب ج}$$

($\overrightarrow{أ د} = \overrightarrow{ب ج}$ لأن أ ب ج د موازي أضلاع)



2. للبرهان على المساواة : $\overleftarrow{\text{أه}} + \overleftarrow{\text{أى}} = \overleftarrow{\text{أج}} \frac{3}{2}$

لدينا : $\overleftarrow{\text{أه}} = \overleftarrow{\text{أج}} + \overleftarrow{\text{جـه}}$ و $\overleftarrow{\text{أى}} = \overleftarrow{\text{أج}} + \overleftarrow{\text{جـى}}$

$$\overleftarrow{\text{أج}} \frac{1}{2} + \overleftarrow{\text{أج}} = \overleftarrow{\text{أى}} \quad \text{و} \quad \overleftarrow{\text{أج}} \frac{1}{2} + \overleftarrow{\text{جـب}} =$$

بالجمع نجد :

$$\overleftarrow{\text{أه}} + \overleftarrow{\text{أى}} = (\overleftarrow{\text{أج}} \frac{1}{2} + \overleftarrow{\text{جـب}}) + (\overleftarrow{\text{أج}} \frac{1}{2} + \overleftarrow{\text{جـد}})$$

$$2 \overleftarrow{\text{أج}} \frac{1}{2} + (\overleftarrow{\text{جـب}} + \overleftarrow{\text{جـد}}) =$$

$$2 \overleftarrow{\text{أج}} \frac{1}{2} + \overleftarrow{\text{جـأ}} =$$

$$2 \overleftarrow{\text{أج}} \frac{1}{2} - \overleftarrow{\text{أج}} =$$

$$\overleftarrow{\text{أه}} + \overleftarrow{\text{أى}} = \overleftarrow{\text{أج}} \frac{3}{2}$$

3. لنبين أن $\overleftarrow{\text{هـى}}$ و $\overleftarrow{\text{بـد}}$ متوازيان .

لدينا : $\overleftarrow{\text{هـى}} = \overleftarrow{\text{هـج}} + \overleftarrow{\text{جـى}}$

$$\overleftarrow{\text{هـى}} = \overleftarrow{\text{هـج}} \frac{1}{2} + \overleftarrow{\text{جـد}} \frac{1}{2} =$$

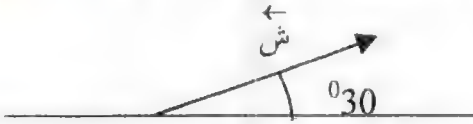
$$(\overleftarrow{\text{بـج}} + \overleftarrow{\text{جـد}}) \frac{1}{2} =$$

$$\overleftarrow{\text{هـى}} = \overleftarrow{\text{بـد}} \frac{1}{2} \quad \text{وهذا يعني أن : } \overleftarrow{\text{هـى}} \parallel \overleftarrow{\text{بـد}}$$

$$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أج} = \overrightarrow{....} ; \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} = \overrightarrow{....} ; \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أه} = \overrightarrow{....}$$

$$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أد} ; \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} = \overrightarrow{أه} ; \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أه} = \overrightarrow{....}$$

3 أنشئ الشعاعين $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ك}$ بحيث يكون منحنى $\overrightarrow{ق}$ أفقيا ويكون منحنى $\overrightarrow{ك}$ عموديا" ويكون : $\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ك}$ ؛ ثم احسب طولَيْ $\overrightarrow{ق}$ و $\overrightarrow{ك}$ ، في كل من الحالات التالية .

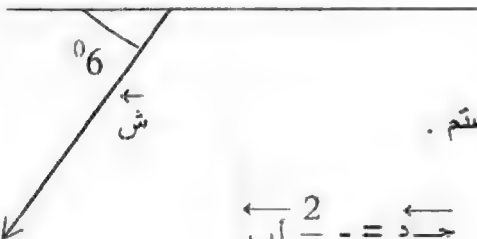


أ) : $\|\overrightarrow{ش}\| = 3$



ب) : $\|\overrightarrow{ش}\| = 2, 5$

ج) : $\|\overrightarrow{ش}\| = 3\sqrt{v}$



4 أ ب [قطعة مستقيمة طولها 6 ستم .

1) أنشئ النقطتين ج و د بحيث :

$$\overrightarrow{أج} = \frac{3}{2} \overrightarrow{أب} ; \overrightarrow{أد} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{أب}$$

2) أوجد العددين α و β بحيث

$$\overrightarrow{أد} = \alpha \overrightarrow{أب} ; \overrightarrow{دب} = \beta \overrightarrow{أب}$$

5 أ ب ج مثلث حيث :

$$\overrightarrow{أب} = 5 \text{ سم} ; \overrightarrow{أج} = 6 \text{ سم} ; \overrightarrow{بج} = 4 \text{ سم}$$

أنشئ النقاط ه ، ف ، ق ، ك ، بحيث

$$\overrightarrow{أه} = 2 \overrightarrow{أب} , \overrightarrow{بف} = 4 \overrightarrow{بج} ; 2 \overrightarrow{أق} = -\overrightarrow{أج}$$

6

اب ج مثلث كفي .

أنشئ النقطتين د و ه بحيث :

$$\overrightarrow{أد} = 2 \overrightarrow{بج} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{أه} = - \overrightarrow{بج}$$

عبر عن الشعاع $\overrightarrow{هـد}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{بج}$.

. الحساب الشعاعي .

7

بسط ، باستعمال علاقة شال كتابة الأشعة التالية

$$(1) \quad \overrightarrow{ق} = \overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أج} - \overrightarrow{جب}$$

$$\overrightarrow{ك} = \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{بد} - \overrightarrow{بج}$$

$$\overrightarrow{ل} = \overrightarrow{جد} - \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{أب}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{ق} = \overrightarrow{دأ} + \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{جد}$$

$$\overrightarrow{ك} = \overrightarrow{أج} + 2 \overrightarrow{جب} + \overrightarrow{بأ}$$

$$\overrightarrow{ل} = 2 \overrightarrow{أب} - \overrightarrow{بج} - \overrightarrow{جأ}$$

8

عبر بأ بسط ما يمكن عما يلي :

$$(1) \quad \overrightarrow{ق} - 2(\overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ك}) - \frac{1}{3} \overrightarrow{ك}$$

$$(2) \quad \frac{2}{5} \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ق} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{ق} - \overrightarrow{ك})$$

$$(3) \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{ق} - \overrightarrow{ك}) - 1(\overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ك})$$

$$(4) \quad 5 \overrightarrow{ق} - 3 \overrightarrow{ك} - (\overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ك})$$

(2) عبر بدلالة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} عما يلي :

$$2 \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} ; \quad \overrightarrow{BA} + 3 \overrightarrow{CA} - 2 \overrightarrow{CB}$$

$$\frac{2}{5} (\overrightarrow{AB} - 5 \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} ; \quad 2 (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{MB} - 3 \overrightarrow{MC}$$

9 \overrightarrow{CQ} ، \overrightarrow{CK} ، \overrightarrow{L} ثلاثة أشعة . عيّن العدد الحقيقي α بحيث $\overrightarrow{L} = \alpha \overrightarrow{CQ}$ علما بأن :

$$(1) \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CQ} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{L} = -\frac{4}{5} \overrightarrow{CK}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{CQ} = -3 \overrightarrow{CK} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{L} = \frac{5}{2} \overrightarrow{CQ}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{CQ} = -\frac{5}{4} \overrightarrow{CK} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{L} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CK}$$

10 أ ، ب ، ج ، هـ أربع نقط من مستقيم (الشكل) .



(1) استعمل التدرّيج المبيّن لاكمال المساويات الشعاعية التالية :

$$\overrightarrow{AJ} = \dots \overrightarrow{AB} ; \quad \overrightarrow{AH} = \dots \overrightarrow{AB} ; \quad \overrightarrow{HB} = \dots \overrightarrow{AB}$$

(2) ليكن الشعاع : $\overrightarrow{O} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. عيّن بالنسبة إلى المعلم (أ ، و)

الأقياس الجبرية التالية :

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{BJ}$$

11 (م ، و) معلم لمستقيم (ق)

علم على (ق) النقط أ ، ب ، ج ، د التي فواصلها هي على الترتيب :

$$4, \frac{15}{2}, 1, -\frac{11}{3}$$

1) احسب الأقياس الجبرية التالية :

$$\overline{أب} , \overline{بج} , \overline{أد} , \overline{جأ} , \overline{أج} - \overline{أد} , 2 \overline{مب} - \overline{بج}$$

2) عين العدد س فاصلة النقطة ن في كل من الحالات التالية :

$$\text{ب) } 2 \overline{حن} + \overline{نأ} = 1$$

$$\text{ا) } \overline{أن} = 3$$

$$\text{د) } 0 \leq \overline{جن} \leq 2$$

$$\text{جـ) } 2 \overline{مب} = 3 \overline{أن}$$

$$\text{ى) } \overline{أن}^2 = 4$$

$$\text{هـ) } 3 \overline{أن} = \overline{أج}$$

1- أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

(م ، و) معلم لمستقيم (ق) .
علم على (ق) النقط التالية :



أ (-2) ، ب ($\frac{3}{2}$) ج (4) .

احسب كلامن : $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ ، $\overline{جب}$

استنتج الأطوال : $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ ، $\overline{جب}$

عين النقطة ه منتصف [ب ج]

نشاط 2 :

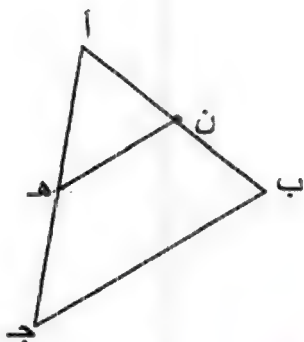
أ ب ج مثلث

ن و ه هما منتصفا الضلعين

[أ ب] و [أ ج]

برهن أن : $\overline{ن ه} = \frac{1}{2} \overline{ب ج}$

استنتج أن (ن ه) // (ب ج)



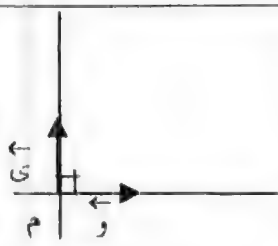
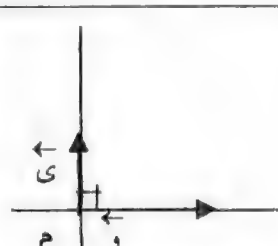
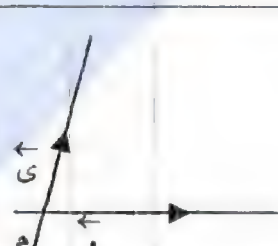
2 . المعلم المستوي

(1) تعريف

م نقطة من المستوي

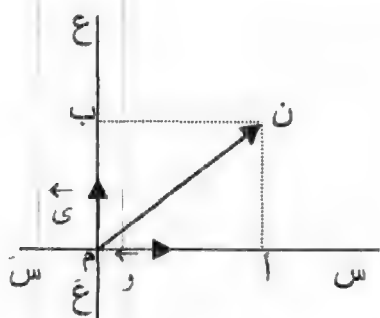
و ، ي شعاعان غير متوازيين .

الثلاثية (م ، و ، ي) تسمى معلما للمستوي .

معلم متعامد متجانس	معلم متعامد	معلم كيفي
 <p>• الشعاعان $\vec{و}$ و $\vec{ي}$ متعامدان وطويلة كل منهما 1</p>	 <p>• الشعاعان $\vec{و}$ و $\vec{ي}$ متعامدان</p>	 <p>• الشعاعان $\vec{و}$ و $\vec{ي}$ غير متعامدين</p>

. في كل ما يأتي :

- الثلاثية (م ، و ، ي) هي معلم متعامد متجانس للمستوي .
- نرمز إلى حامل شعاع الوحدة $\vec{و}$ بالرمز (س س) ونسمي (س س ، و) محور القواصل و إلى حامل شعاع الوحدة $\vec{ي}$ بالرمز (غ غ) ونسمي (غ غ ، ي) محور التراتيب



2) احداثيات نقطة .

(م ، و ، ي) معلم للمستوي :
ليكن أ ، ب هما المسقطان العموديان للنقطة ن على الترتيب .
فيكون :

(م أن ب متوازي اضلاع)

$$\vec{م} = \vec{م أ} + \vec{م ب}$$

$$\vec{م} = \vec{م أ} + \vec{م ب}$$

وبوضع : س = \bar{m} ، ع = \bar{m} يكون :

← ← ←
من = س و ع ی

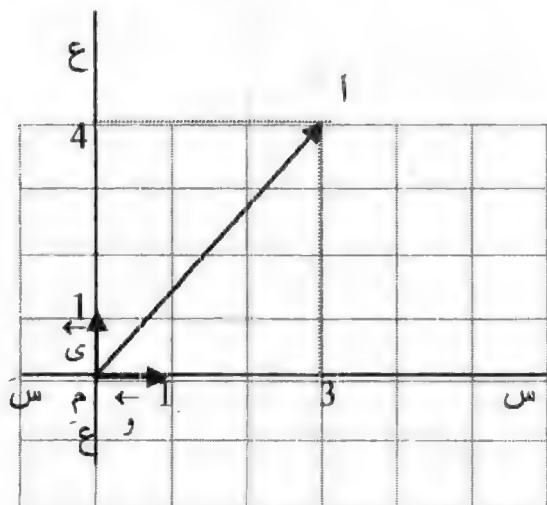
تمثل الثنائية (س ، ع) من جهة إحداثيي النقطة ن بالنسبة إلى المعلم

(م، و، ي) و تمثل من جهة أخرى المركبتين السلمييتين للشعاع م ←
بالنسبة إلى المعلم نفسه .

نكتب : ن (س ، ع) و نقرا النقطة ن فاصلتها س و ترتيبها ع

كما نكتب: $\overleftarrow{m} \begin{pmatrix} s \\ e \end{pmatrix}$ ونقرأ الشعاع $\overleftarrow{m} n$ ، مركبته الأولى s ومركبته

الثانية ع .



مثال : النقطة من المستوي

المزود بالمعلم (م، و، ي) ←
الشكل يبين أن إحداثي
النقطة هما 3، 4.

مركبتا الشعاع م أ أيضا
3، 4. نكتب :

$$\overleftarrow{5} 4 + \overleftarrow{9} 3 = \overleftarrow{1} 7$$

إذن $(4, 3)$ ، $\overleftarrow{م أ}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

يمكن كتابة كل شعاع $\vec{S} \begin{pmatrix} s \\ e \end{pmatrix}$ على الشكل :

← ش = ← س + ← ع ی

تسمى الثنائية (و ، ي) أساسا للمستوي .

. تساوي شعاعين :

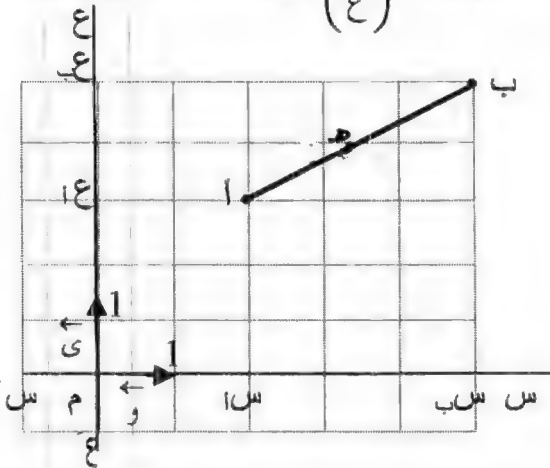
$$\text{ليكن : } \vec{ش} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}, \quad \vec{ش} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$$

$$\text{لدينا } \vec{ش} = \vec{ش} \Leftrightarrow (س = س) \text{ و } (ع = ع)$$

$$\vec{ش} = \vec{0} \Leftrightarrow (س = 0) \text{ و } (ع = 0)$$

(3) مركبتا شعاع $\vec{أب}$

(م، و، ي) معلم للمستوي. بفرض $\vec{أب} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$. لنعبر عن س، ع بدلالة



إحداثيات النقطتين أ و ب

لدينا :

$$\vec{أب} = \vec{أم} + \vec{مب}$$

$$\vec{أب} = \vec{مب} - \vec{مأ}$$

$$س \vec{و} + ع \vec{ي} = (سب \vec{و} + عب \vec{ي}) - (سا \vec{و} + عا \vec{ي})$$

$$= (سب - سا) \vec{و} + (عب - عا) \vec{ي}$$

من هذه المساواة الشعاعية ينتج :

$$س = سب - سا \text{ و } ع = عب - عا$$

أي :

$$\vec{أب} = \begin{pmatrix} سب - سا \\ عب - عا \end{pmatrix}$$

(4) نتائج :

المستوي منسوب إلى معلم (م؛ و، ي) \leftarrow
 بفرض $\vec{ش} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ ، $\vec{ش} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$.

مركبتا $(\vec{ش} + \vec{ش})$	هما	$\begin{pmatrix} س + س \\ ع + ع \end{pmatrix}$
مركبتا $\alpha \vec{ش}$	هما	$\begin{pmatrix} س \alpha \\ ع \alpha \end{pmatrix}$

بفرض أ (س ، ع) ، ب (س ، ع) نقطتان من المستوي .

أحداثيا النقطة ه منتصف القطعة [أ ب]	هما	$\left(\frac{س + س}{2} , \frac{ع + ع}{2} \right)$
المسافة بين أ و ب	هي	$أ ب = \sqrt{(س - س)^2 + (ع - ع)^2}$

(5) شرط توازي شعاعين

$\vec{ش} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ و $\vec{ش} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ شعاعان غير معدومين ، لنبحث عن شرط توازيهما .

لدينا : $\vec{ش} // \vec{ش} \Leftrightarrow \vec{ش} = \alpha \vec{ش} : \alpha \in \mathbb{R}$ $\vec{ش} = \alpha \vec{ش}$

$$\begin{pmatrix} س \alpha \\ ع \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{s} = \alpha \vec{s} \\ \vec{e} = \alpha \vec{e} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\vec{e}}{\vec{e}} = \frac{\vec{s}}{\vec{s}} \Leftrightarrow$$

$$\vec{s} // \vec{s} \Leftrightarrow \vec{s} \vec{e} - \vec{e} \vec{s} = 0$$

العدد الحقيقي $\vec{s} \vec{e} - \vec{e} \vec{s}$ يسمى محدد الشعاعين \vec{s} و \vec{e} ونكتب :

$$\text{محدد } \vec{s} \text{ و } \vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{s} & \vec{e} \\ \vec{e} & \vec{s} \end{vmatrix}$$

$$\text{ومنه : } \vec{s} // \vec{e} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{s} & \vec{e} \\ \vec{e} & \vec{s} \end{vmatrix} = 0$$

3. تطبيقات

في كل ما يأتي نعتبر أن المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس (م ، و ، ي) .

(1) المعادلة الديكارتية لمستقيم

. شعاع توجيه مستقيم .

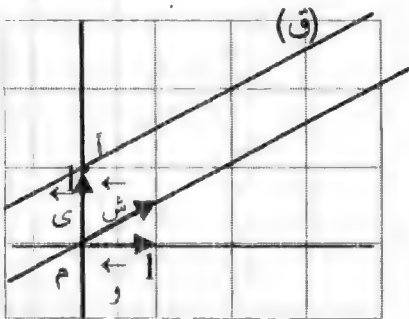
كل شعاع غير معدوم منحاه المستقيم (ق) يسمى شعاع توجيه (ق)

. إنشاء مستقيم معين بنقطة وشعاع توجيه

لإنشاء المستقيم (ق) الذي يشمل

النقطة أ وشعاع توجيهه \vec{s} حيث

$$أ (1, 0) \text{ و } \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



. ننشئ النقطة أ والشعاع \vec{s} .

. ننشئ المستقيم الذي يشمل أ

. ويوازي حامل \vec{s} .

(الشكل) :

. معادلة مستقيم معين بنقطة وشعاع توجيه

لتكن النقطة أ (1 ، 4) والشعاع ش $\leftarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3- \end{pmatrix}$.

ولنبحث عن معادلة المستقيم الذي يشمل أ وشعاع توجيهه .

. معادلة ق (1 ، ش)

لتكن ن (س ، ع) نقطة من المستوي .
لدينا :

$$\leftarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3- \end{pmatrix} \text{ ش} \quad \leftarrow \text{أن} \begin{pmatrix} 1-س \\ 4-ع \end{pmatrix}$$

$$ن \in (ق) \Leftrightarrow \leftarrow \text{أن} // \leftarrow \text{ش}$$

$$\Leftrightarrow \text{محدد أن و ش} = 0$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 1-س \\ 3- & 4-ع \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$0 = (3-) (1-س) 2 - (4-ع) \Leftrightarrow$$

$$0 = 3 - 3س + 2ع - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3س + 2ع - 11 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

المساواة (1) التي تربط بين إحداثيي كل نقطة ن (س ، ع) من (ق) تسمى معادلة ديكارتية للمستقيم (ق) . نكتب :

$$(ق) : 3س + 2ع - 11 = 0$$

وبصفة عامة

أ ، ب ، ج أعداد حقيقية :

كل معادلة من الشكل : أس + ب ع + ج = 0

حيث أ ، ب غير معدومين معا هي معادلة ديكارتية لمستقيم شعاع توجيهه هو

$$\leftarrow \begin{pmatrix} -ب \\ أ \end{pmatrix} \text{ ش}$$

• معادلة مستقيم معين بنقطتين :

لنعين معادلة للمستقيم (أ ب) حيث أ (2 ، 1) ، ب (0 ، 4) .

الشعاع $\overrightarrow{أ ب}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (أ ب) .

فالمستقيم (أ ب) معين بشعاع التوجيه $\overrightarrow{أ ب}$ والنقطة أ (2 ، 1) مثلا .

لدينا : $\overrightarrow{أ ب} \begin{pmatrix} 1- & 4- \\ 2- & 0 \end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{أ ب} \begin{pmatrix} 5- \\ 2- \end{pmatrix}$ أ (2 ، 1)

لتكن ن (س ، ع) نقطة من المستوي .

$$\overrightarrow{أ ن} \begin{pmatrix} 1-س \\ 2-ع \end{pmatrix}$$

$$ن \in (أ ب) \Leftrightarrow \overrightarrow{أ ن} // \overrightarrow{أ ب}$$

$$\Leftrightarrow \text{محدد} [\overrightarrow{أ ب} , \overrightarrow{أ ن}] = 0$$

$$0 = \begin{vmatrix} 5- & 1-س \\ 2- & 2-ع \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$0 = (2-ع)(5-) - (1-س)(2-) \Leftrightarrow$$

$$0 = 10 - ع 5 + 2 + س 2 \Leftrightarrow$$

$$0 = 8 - ع 5 + س 2 \Leftrightarrow$$

$$0 = 8 + ع 5 - س 2 \Leftrightarrow$$

ومنه : (أ ب) : $2س - 5ع + 8 = 0$ (1)

هي معادلة ديكارتية للمستقيم (أ ب)

• المعادلة المختصرة للمستقيم (أ ب) :

لنعبّر عن ع بدلالة س :

لدينا :

$$(1) \Leftrightarrow ع = \frac{2}{5}س + \frac{8}{5} \text{ } (2)$$

المعادلة (2) هي من الشكل :
 $E = A + B$
وتسمى المعادلة المختصرة للمستقيم (أ ب)
يسمى العدد أ معامل توجيه المستقيم (أ ب) .

(2) شرط توازي مستقيمين

. يتوازي مستقيمان إذا وفقط إذا كان شعاعا توجيهيهما متوازيين

مثال 1 : ليكن : (ق) : $3 - S = 2 + E = 0$
(ق') : $2 - S = 4 + E = 0$

شعاع توجيه (ق) هو $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

شعاع توجيه (ق') هو $\vec{S}' = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

لدينا :

$$\text{محدد } \vec{S} \text{ و } \vec{S}' = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

إذن $\vec{S} // \vec{S}'$ وبالتالي : (ق) // (ق')

مثال 2

ليكن : (ق) : $3 - S = 2 + E = 1$
(ق') : $4 - S = 5 + E = 2$

شعاع توجيه (ق) هو $\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

وشعاع توجيه (ق') هو $\vec{S}' = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

لدينا : $0 \neq 23 - = (3 \times 5) - (2-) \times 4 = \begin{vmatrix} 5 & 2- \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

إذن : $\vec{ش}$ و $\vec{ش}$ غير متوازيين وبالتالي (ق) و (ق) غير متوازيين .

4 . تمرين محلول

(م، و، ي) معلم للمستوي

نعتبر النقط أ (2، 2-) ، ب (-1، 5) ، ج (5، 3) .

1. عيّن الأطوال : أب ، آج ، ب ج .

2. عيّن النقطة ن بحيث $\vec{م ن} = \vec{أ ب} + \vec{أ ج} - \frac{1}{2} \vec{ب ج}$

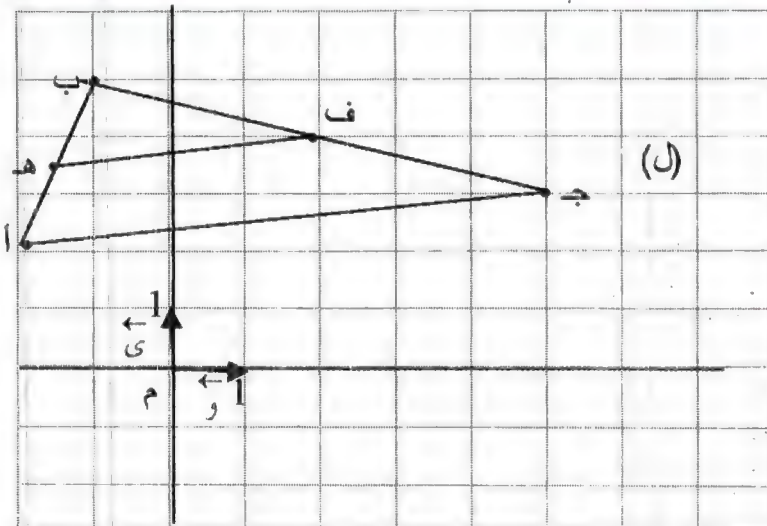
3. لتكن هـ ، ف منتصفي [أ ب] و [ب ج] .

بين أن الشعاعين $\vec{هـ ف}$ و $\vec{أ ج}$ متوازيان .

4. عيّن معادلة ديكرتية للمستقيم (ل) الذي يشمل النقطة أ و شعاع توجيهه $\vec{هـ ف}$.

هل النقطة ج تنتمي إلى (ل) ؟

الحل :



1. تعيين الأطوال أ ب ، أ ج ، ب ج :

. الطول أ ب :

$$\sqrt{2(2-5)+2(2+1-1)} = \text{أ ب}$$

$$\sqrt{10} = \text{أ ب}$$

. الطول أ ج :

$$\sqrt{2(2-3)+2(2+5)} = \text{أ ج}$$

$$\sqrt{50} =$$

$$5\sqrt{2} = \text{أ ج}$$

. الطول ب ج :

$$\sqrt{2(5-3)+2(1+5)} = \text{ب ج}$$

$$\sqrt{40} =$$

$$2\sqrt{10} = \text{ب ج}$$

2. تعيين النقطة ن :

$$\left(\begin{matrix} 3 \\ 1- \end{matrix} \right) \xleftarrow{\text{أ}} \frac{1}{2}, \left(\begin{matrix} 6 \\ 2- \end{matrix} \right) \xleftarrow{\text{ب}}, \left(\begin{matrix} 7 \\ 1 \end{matrix} \right) \xleftarrow{\text{أ}}, \left(\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right) \xleftarrow{\text{أ}}$$

$$\xleftarrow{\text{أ}} \frac{1}{2} - \xleftarrow{\text{أ}} + \xleftarrow{\text{أ}} = \xleftarrow{\text{ن}}$$

$$(\xleftarrow{\text{أ}} 1 - \xleftarrow{\text{ب}} 3) - (\xleftarrow{\text{أ}} 1 + \xleftarrow{\text{ب}} 7) + (\xleftarrow{\text{أ}} 3 + \xleftarrow{\text{أ}} 1) =$$

$$\xleftarrow{\text{أ}} (1+1+3) + \xleftarrow{\text{ب}} (3-7+1) =$$

$$\xleftarrow{\text{أ}} 5 + \xleftarrow{\text{ب}} 5 = \xleftarrow{\text{ن}}$$

فالنقطة ن هي : ن (5، 5)

3. توازي الشعاعين هـ ف و أ ج :

$$\left(\frac{5+2}{2}, \frac{1-2-}{2} \right) \text{ هـ} \Leftrightarrow [\text{أ ب}]$$

$$\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2} - \right) \text{ هـ} \Leftrightarrow$$

$$F \text{ منتصف } [A, B] \Leftrightarrow F \left(\frac{3+5}{2}, \frac{5+1-}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow F(4, 2)$$

$$\text{ومنه : } \overrightarrow{HF} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \right) \text{ أي } \overrightarrow{HF} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ و } \overrightarrow{AH} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$0 = \frac{7}{2} - 1 \times \frac{7}{2} = \begin{vmatrix} 7 & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = [\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{AH}] \text{ محدد}$$

$$\text{إذن : } \overrightarrow{HF} // \overrightarrow{AH}$$

4. إيجاد معادلة ديكارتية للمستقيم (ل)

$$\text{المستقيم (ل) معين بالنقطة أ } (-2, 2) \text{ وشعاع التوجيه } \overrightarrow{HF} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

لتكن ن (س، ع) نقطة من المستوي :
لدينا :

$$\overrightarrow{AN} \left(\begin{pmatrix} 2+s \\ 2-e \end{pmatrix} \right), \text{ أ } (-2, 2)$$

$$N \in (L) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} // \overrightarrow{HF}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 7 & 2+s \\ 2 & 2-e \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$0 = (2 - ع) \frac{7}{2} - (2 + س) \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$0 = 16 + ع 7 - س \Leftrightarrow$$

ومنه :

$$(ل) : س - 7 = 16 + ع$$

15. جـ (3 ، 5) ينتمي إلى (ل) ؟

جـ د (ل) $\Leftrightarrow (3 ، 5)$ تحقق معادلة (ل) .

بتعويض الثنائية (س ، ع) بالثنائية (3 ، 5) نجد :

$$0 = 21 - 21 = 16 + (3 \times 7) - 5$$

إذن الثنائية (3 ، 5) تحقق معادلة (ل)

وبالتالي : جـ د (ل)

تمارين

النقط والأشعة

1. (م، و، ي) معلم متعامد متجانس للمستوي، محوره (س س، و) و (ع ع، ي).

عين نظائر النقط: أ $(-\frac{2}{3}, 1)$ ، ب $(2, 5 - \frac{3}{4})$ ، ج $(0 - \frac{5}{2}, 0)$ ، د $(0, 3, 5)$ بالنسبة إلى كل من (س س) و (ع ع).

2. (م، و، ي) معلم متعامد متجانس للمستوي.
نعتبر النقط: أ $(1, 2 -)$ ، ب $(2, 1)$ ، ج $(1, 2 -)$ ، د $(2 - , 1)$
برهن أن الرباعي أ ب ج د متوازي أضلاع.

3. (م، و، ي) معلم متعامد متجانس للمستوي
نعتبر النقط التالية: أ $(4, 2)$ ، ب $(0, 5)$ ، ج $(-3, -6)$ ، د $(-5, -4)$.

- (1) علم هذه النقط
- (2) عين إحداثيات منتصفات القطع [أ ب]، [ج د]، [د ب]
- (3) عين المركبات السلمية للأشعة: $\overrightarrow{أ ج}$ ، $\overrightarrow{د أ}$ ، $\overrightarrow{ب ج}$
- (4) عين المسافات: أ ب، ب ج، د أ، أ ج.

4. المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (م، و، ي).
أ، ب، ج نقاط من المستوي حيث:

أ $(-2, 3)$ ، ب $(1, 4)$ ، ج $(4, -5)$.
عين س و ع إحداثيي النقطة ن في كل من الحالات التالية

$$(1) \overrightarrow{ب ن} = \overrightarrow{أ ب}$$

(2) ن منتصف القطعة [أ ج]

$$(3) \quad \overrightarrow{0} = \overrightarrow{3ج} + \overrightarrow{2أب}$$

(4) أب جن متوازي أضلاع .

$$(5) \quad \overrightarrow{بن} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{بج})$$

(6) ن هي نظيرة ج بالنسبة إلى ب .

5. (م، و، ي) معلم متعامد متجانس للمستوي :

لتكن النقط أ (3، 0) ، ب (3، -9) ج (-3، 5) ، د (7، -3/2)
هـ (-1، 11/3)

- (1) هل الشعاعان $\overrightarrow{أب}$ و $\overrightarrow{أج}$ متوازيان ؟
- (2) هل النقط أ ، ب ، ج على استقامة واحدة ؟
- (3) هل النقط أ ، ب ، د على استقامة واحدة ؟
- (4) هل النقط ب ، ج ، هـ على استقامة واحدة ؟

6. (م، و، ي) معلم متعامد متجانس للمستوي .

نعتبر النقط : أ (0، -3) ، ب (2، 3) ، ج (6، 2) ، د (-1، 1)
(1) عَيِّن إحداثيات النقطتين هـ ، ف بحيث يكون :

$$\overrightarrow{ب هـ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{أب} .$$

$$\overrightarrow{أف} = 3 \overrightarrow{أد} .$$

- (2) عَيِّن مركبات الشعاعين $\overrightarrow{ج هـ}$ و $\overrightarrow{ج ف}$.
- (3) أثبت أن النقط ج ، هـ ، ف على استقامة واحدة .

7. (م، و، ي) معلم متعامد متجانس للمستوي . أ ، ب ، ج ، د نقاط من

المستوي حيث : أ (-2، 1) ، ب (3، 3) ، ج (0، -1)

د (5 - ، 3)

(1) عَيِّن إحداثيَي النقطة هـ نظيرة جـ بالنسبة إلى د .

(2) عَيِّن إحداثيَي النقطة ث بحيث : $\overrightarrow{ثأ} + \overrightarrow{ثهـ} + \overrightarrow{ثد} = \overrightarrow{0}$

(3) عَيِّن مركبات الشعاعين $\overrightarrow{هـث}$ ، $\overrightarrow{هـب}$.

(4) أثبت أن النقط هـ ، ث ، ب على استقامة واحدة .

8. أ ، ب ، ج ثلاث نقط من مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد متجانس (م، و، ي) ($\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ي}$)

احسب ، في كل من الحالات الآتية الأطوال أ ب ، ب ج ، أ ج ثم تحقق أن أ ب ج مثلث قائم ، عَيِّن الزاوية القائمة .

(1) أ (5 ، 2) ، ب (3 ، 5) ، ج (1 ، - 3)

(2) أ (6 ، 0) ، ب (0 ، 8) ، ج (1 ، - 7)

(3) أ (- 2 ، - $\frac{3}{2}$) ، ب (4 ، 3) ، ج ($\frac{9}{2}$ ، - $\frac{13}{2}$)

معادلة مستقيم .

9. (م، و، ي) معلم متعامد متجانس للمستوي .

ارسم المستقيم (ق) المعين بالنقطة أ و شعاع التوجيه $\overrightarrow{ش}$ في كل من الحالات التالية :

(1) أ (5 ، 0) ، $\overrightarrow{ش} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) أ (1 ، - 2) ، $\overrightarrow{ش} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) أ (4 ، 1) ، $\overrightarrow{ش} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. (م، و، ي) معلم متعامد متجانس للمستوي .

أوجد معادلة ديكارتية للمستقيم المعين بالنقطة أ و شعاع التوجيه $\overrightarrow{ش}$ في كل من الحالات التالية .

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4- \end{pmatrix} \leftarrow \text{ش} , (2- , 1) \quad \leftarrow$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ش} , (3 , 4) \quad \leftarrow$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1- \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{ش} , (0 , 3) \quad \leftarrow$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{ش} , (1 , 0) \quad \leftarrow$$

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{4} \end{pmatrix} \leftarrow \text{ش} , (7- , 1-) \quad \leftarrow$$

11 في معلم متعامد متجانس للمستوي (م، و، ي) نعتبر النقط :

أ (1، 6) ، ب (4، 3) ، ج (6، 1) ، د (1، 2-)
أوجد معادلة ديكارتية لكل من المستقيمات (أ ب) ، (أ ج) ، (د ج) (د ب) ، (ب ج) ، (م أ) ، (م ج) .

12 (م، و، ي) معلم متعامد متجانس للمستوي . (ق₁) ، (ق₂) ، (ق₃)

مستقيمات معادلاتها الديكارتية :

$$(ق_1) : س - 3 = 25 + ع$$

$$(ق_2) : 3س - 4 = ع$$

$$(ق_3) : 3س + 4 = 19 - ع$$

(1) عيّن ش₁ ، ش₂ ، ش₃ أشعة توجيه المستقيمات

(ق₁) ، (ق₂) ، (ق₃) على الترتيب .

(2) عيّن معادلة مختصرة ، ثم معامل التوجيه لكل من (ق₁) ، (ق₂) ، (ق₃) .

13 (م، و، ي) معلم متعامد متجانس للمستوي .

هل النقطة أ تنتمي إلى المستقيم (ق) في كل من الحالات التالية ؟

$$(1) \quad (3, 5) \text{ و } (ق) : ع = -\frac{1}{6}س + 4$$

$$(2) \quad (-2, 3) \text{ و } (ق) : 11س + 2ع + 15 = 0$$

$$(3) \quad (1, \frac{1}{3}) \text{ و } (ق) : -4س + 2ع - 3 = 0$$

14 (م، ر، ي ←) معلم متعامد متجانس للمستوي، (ق) مستقيم معادلته

$$3س + 4ع - 2 = 0$$

(1) عيّّن شعاع توجيه المستقيم (ق).

(2) عيّّن المعادلة المختصرة ومعامل توجيه (ق).

(3) عيّّن إحداثيات الوحدتين تقاطع (ق) مع محور الترتيب و محور الفواصل

(4) عيّّن ترتيب النقطة ج من (ق) التي فاصلتها $2\sqrt{3}$.

(5) عيّّن α بحيث تنتمي النقطة د $(\alpha, -\frac{3}{7})$ إلى (ق).

1. أنشطة تمهيدية

نشاط 1 :

تأ و ما دالتان معرفتان في ح كما يلي :

$$س \mapsto (س) = -\frac{3}{5}س \quad ؟ \quad س \mapsto (س) = 2س - 1$$

1. قارن بين كل من : (-1) و (1) ثم (-5) و (5)

. تحقق أنه من أجل $س \in \mathbb{R}$: $(-س) = - (س)$ و $(س) = س$

2. قارن بين كل من : (2) و (-2) ثم $(\frac{1}{2})$ و $(-\frac{1}{2})$

. تحقق أنه من أجل $س \in \mathbb{R}$: $(-س) = - (س)$ و $(س) = س$

نشاط 2 :

تأ دالة معرفة في ح كما يلي :

$$س \mapsto (س) = س^2 + س + 1$$

. قارن بين (-1) و (1) ثم بين $(\frac{1}{2})$ و $(-\frac{1}{2})$.

. احسب $(-س)$ ثم قارن بين $(-س)$ و $(س)$.

. أدرس إشارة الجداء $س(س + 1)$

. كيف نختار $س$ حتى يكون : $(س) < 1$ ؟

نشاط 3 :

1) لتكن الدالة $س$ المعرفة في ح : $س \mapsto (س) = 2س - 1$

. أتمم الجدول التالي :

س	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	0	1	$\frac{3}{2}$	5
$ع = (س)$

. رتب قيم المتغير س باستعمال الرمز " > " .

. رتب قيم الصور ع باستعمال الرمز " > " .

لاحظ أنه عندما يأخذ المتغير س قيمة "متزايدة فإن الصور ع تأخذ قيمة" متزايدة
نقول عندئذ إن الدالة تا متزايدة.

(2) لتكن الدالة تا المعرفة في ح* : س ← ها (س) = $\frac{2}{s}$

. أتم الجدول التالي :

س	3-	2-	1-	1	2	5
ع = ها(س)

لاحظ أنه عندما يأخذ المتغير س قيمة متزايدة فإن الصورة ع تأخذ قيمة" متناقصة
نقول عندئذ إن الدالة ها متناقصة .

2 . عموميات على الدوال العددية لمتغير حقيقي

(1) تعريف

كل دالة لمجموعة الأعداد الحقيقية في نفسها تسمى دالة عددية لمتغير حقيقي

. نعني من الآن فصاعداً بكلمة دالة الدالة العددية لمتغير حقيقي ، ونرمز إليها
عادة برموز مثل : تا ، حا ، ها ، ونعبر عنها بكتابة مثل :

تا : ح ← ح

س ← ع = تا (س)

. س هو متغير الدالة تا

. تا (س) هي صورة س بالدالة تا

. مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة العناصر س من ح التي لكل منهما
صورة بالدالة تا .

مثلة :

(1) الدالة $\tau_a: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$s \mapsto 2s + 1$$

هي دالة معرفة في \mathcal{H} ، ومجموعة تعريفها هي :

$$\tau_a =]-\infty, +\infty[$$

(2) الدالة $\tau_a: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$s \mapsto 5s^2$$

هي دالة معرفة في \mathcal{H} ومجموعة تعريفها هي :

$$\tau_a =]-\infty, +\infty[$$

(3) الدالة $\tau_a: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$s \mapsto \frac{2}{s}$$

هي دالة معرفة في \mathcal{H}^* ومجموعة تعريفها هي :

$$\tau_a =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

2. اتجاه تغيرات دالة

(1) نسبة تزايد دالة

τ_a دالة معرفة في مجال \mathcal{F}

s_1 و s_2 قيمتان مختلفتان من \mathcal{F}

النسبة $\frac{\tau_a(s_2) - \tau_a(s_1)}{s_2 - s_1}$ تسمى نسبة تزايد الدالة τ_a في المجال \mathcal{F}

مثال 1 :

لتكن الدالة τ_a حيث :

$\tau_a: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$s \mapsto 2s + 1$$

وليكن s_1, s_2 عنصرين مختلفين من المجال $[2, 3]$

نسبة تزايد τ_a في هذا المجال هي :

$$2 = \frac{\tau_a(s_2) - \tau_a(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{(2s_2 + 1) - (2s_1 + 1)}{s_2 - s_1} = \frac{2(s_2 - s_1)}{s_2 - s_1}$$

مثال 2 :

$$\text{ح} : \text{ح} \leftarrow \text{ح} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} - 1$$

ليكن س_1 ، س_2 عنصرين مختلفين من المجال $[1, 2]$ نسبة تزايد ح في هذا المجال هي :

$$\begin{aligned} \frac{2(1-\text{س}_1) - (2-\text{س}_2)}{1-\text{س}_2} &= \frac{\text{ح}(1-\text{س}_1) - \text{ح}(2-\text{س}_2)}{1-\text{س}_2} \\ \frac{2(1-\text{س}_1) - (2-\text{س}_2)}{1-\text{س}_2} &= \\ \frac{(1-\text{س}_2)(1-\text{س}_1) - (1-\text{س}_2)(2-\text{س}_2)}{1-\text{س}_2} &= \\ (1-\text{س}_2) - (2-\text{س}_2) &= \end{aligned}$$

(2) اتجاه تغير دالة عددية في مجال
• تعريف

تا دالة معرفة في مجال ف

س_1 ، س_2 عنصران مختلفان من ف ،

تا متزايدة في المجال ف معناه $0 < \frac{\text{تا}(\text{س}_2) - \text{تا}(\text{س}_1)}{1-\text{س}_2}$

تا متناقصة في المجال ف معناه $0 > \frac{\text{تا}(\text{س}_2) - \text{تا}(\text{س}_1)}{1-\text{س}_2}$

تا ثابتة في المجال ف معناه $0 = \frac{\text{تا}(\text{س}_2) - \text{تا}(\text{س}_1)}{1-\text{س}_2}$

ملاحظة :

حسب النشاط 3 . والتمرين السابق يمكن القول بأن :

- تا متزايدة في مجال ف معناه : الصور تتغير بنفس اتجاه تغير سوابقها .
- تا متناقصة في مجال ف معناه : الصور تتغير بعكس اتجاه تغير سوابقها .
- تا ثابتة في مجال ف معناه : إذا تغيرت السوابق في المجال ف فإن صورها لا تتغير .

3) جدول تغيرات دالة في مجال [أ ، ب] .

. دراسة تغيرات دالة تا معرفة في مجال ف معناها تعيين المجالات من ف التي تكون الدالة تا في كل منها إما متزايدة وإما متناقصة وإما ثابتة .
تسجل نتائج هذه الدراسة في جدول يسمى جدول تغيرات تا

س	أ	ب
تا	تا(أ)	تا(ب)

س	أ	ب
تا	تا(أ)	تا(ب)

تا متناقصة في المجال [أ ، ب]

تا متزايدة في المجال [أ ، ب]

3 . التمثيل البياني لدالة

ينسب المستوي إلى معلم (م ، و ، ي)

1) تعريف

تا دالة معرفة على مجموعة ف

التمثيل البياني (ي) للدالة تا بالنسبة إلى المعلم (م ، و ، ي) هو مجموعة النقاط ن (س ، ع) من المستوي حيث :
س و ف و ع = تا (س) .

. المجموعة (ي) تسمى أيضا المنحني الممثل للدالة تا .

. المساواة ع = تا (س) تسمى معادلة المنحني (ي)

نكتب : (ي) : ع = تا (س) ونقرأ : المنحني (ي) الذي معادلته :
ع = تا (س) .

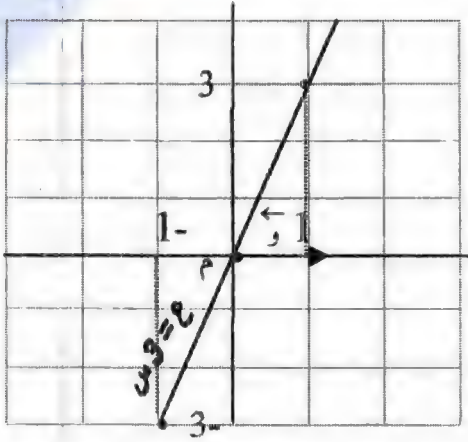
مثال 1

المنحني البياني للدالة س ← 3س

هو مجموعة النقاط ن (س ، ع) حيث :

س و ح و ع = 3س أي المستقيم (ق) الذي معادلته ع = 3س

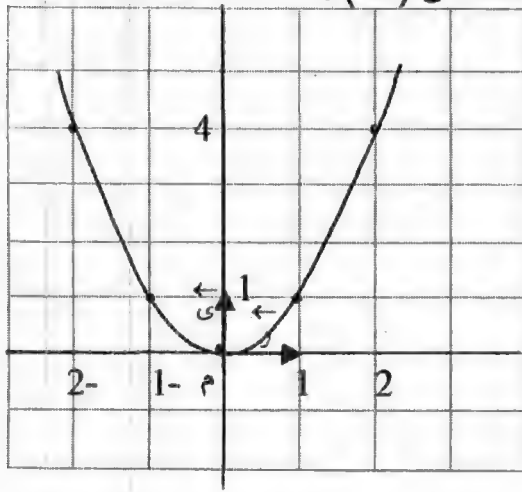
الجدول التالي يتضمن إحداثيات بعض النقاط من (ق)



س	1-	0	1
ع	3-	0	3

مثال 2 :

المنحني البياني (ك) للدالة $s \rightarrow s^2$ هو مجموعة النقاط ن (س ، ع)
حيث : س $\in \mathbb{R}$ و $ع = s^2$.
الجدول التالي يتضمن إحداثيات بعض النقاط من (ك) .



س	2-	1-	0	1	2
ع	4	1	0	1	4

لاحظ ان هذه الدالة متناقصة في المجال $[0, \infty)$ و متزايدة في المجال $(-\infty, 0]$.
نحصل على المنحني (ك) في المجال $[-2, 2]$ بوصل النقاط
 $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(2, 4)$ ،
 $(1, 1)$ ، $(2, 4)$ مع بعضها
مراعين تغيرات الدالة .

(2) الدوال الزوجية ، الدوال الفردية

تعريف .

تأ دالة معرفة في مجموعة ف

نقول إن :

تأ زوجية إذا وفقط إذا : $\forall s \text{ د ف : } -s \text{ د ف و } \bar{\text{تأ}} (s) = \text{تأ} (s)$
 تأ فردية إذا وفقط إذا : $\forall s \text{ د ف : } -s \text{ د ف و } \bar{\text{تأ}} (s) = -\text{تأ} (s)$

أمثلة :

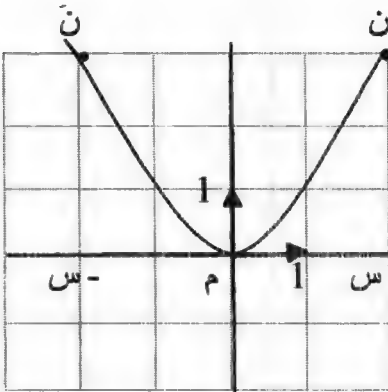
1 - الدالة : $s \mapsto \frac{1}{|s|}$ المعرفة في ح* هي دالة زوجية لأن :

$$\forall s \in \text{ح}^* , -s \in \text{ح}^* \text{ و } \frac{1}{|-s|} = \frac{1}{|s|} \quad (|-s| = |s|)$$

2 - الدالة $s \mapsto s^3$ المعرفة في ح هي دالة فردية لأن :

$$\forall s \in \text{ح} : -s \in \text{ح} \text{ و } (-s)^3 = -s^3$$

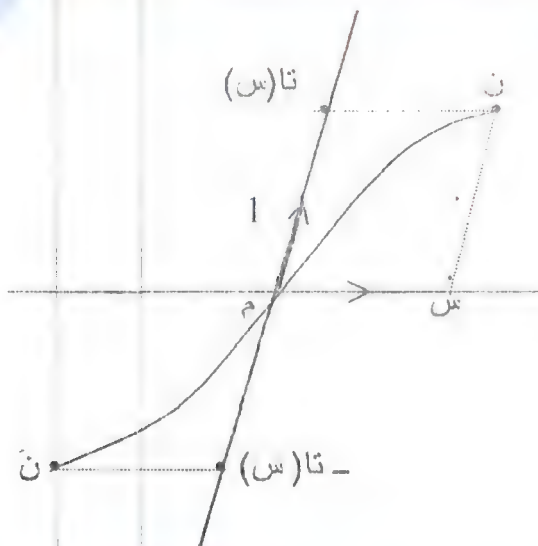
. التفسير الهندسي :



إذا كانت $n(s)$ ، $\bar{n}(s)$ نقطة من المنحني (ل) الممثل لدالة زوجية تأ فإن $\bar{n}(-s)$ ، $n(s)$ هي نقطة من (ل) فإذا كان المحوران متعامدين فإن n و \bar{n} متناظرتان بالنسبة إلى محور الترتيب .

ومنه :

إذا كانت الدالة تا زوجية ، فإن ممثلها البياني (ل) بالنسبة إلى معلم متعامد
(م ، و ، ي) يقبل محور تناظر هو محور الترتيب .



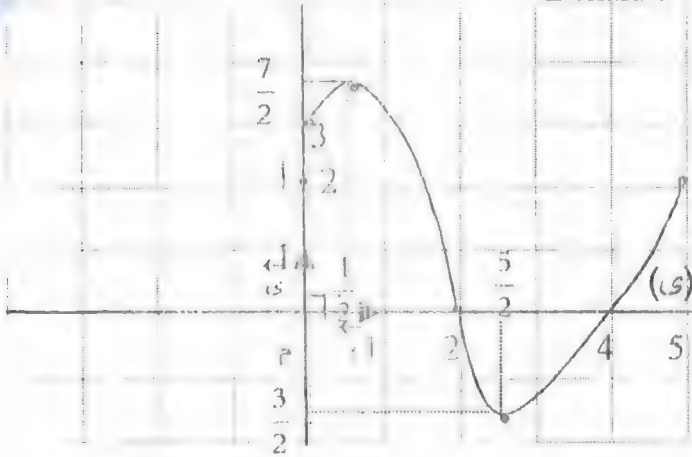
إذا كانت ن (س ، تا (س))
نقطة من المنحني (ل) الممثل
لدالة فردية تا
فإن ن (- س ، - تا (س))
هي نقطة من (ل) .
فالنقطتان ن و ن متناظرتان
بالنسبة مبدأ المعلم م .

ومنه :

إذا كانت الدالة تا فردية ، فإن ممثلها البياني (ل) بالنسبة إلى معلم كيفي
(م ، و ، ي) يقبل مركز تناظر هو المبدأ م .

4. تطبيق

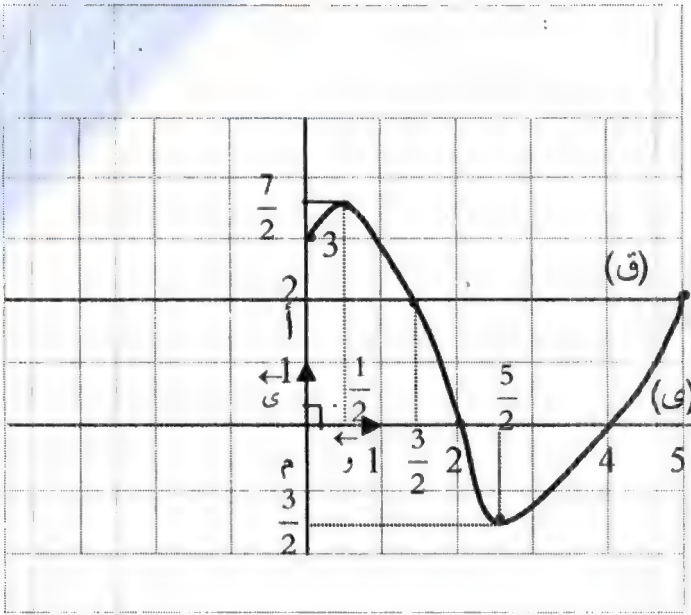
الحل البياني لمعادلة بفرض (ى) التمثيل البياني للدالة تا (الشكل) ولنحل
بيانياً المعادلة : تا (س) = 2



تحليل المعطيات .

الحل البياني للمعادلة تا (س) = 2 يعني أننا نبحث عن فواصل النقاط من
المنحني (ى) التي تراتيبها 2 .
الطريقة .

- نحدد موقع العدد 2 على محور الترتيب وليكن أ ، ثم نرسم المستقيم الأفقي
(ق) الذي يشمل أ .
- نقرأ فواصل نقاط تقاطع (ق) مع (ى) إن وجدت . فنحصل على مجموعة
حلول هذه المعادلة وهي :
مج = { 5 ، 1,5 }



4. تمرين محلول

تا دالة عددية معرفة كما يلي :

$$س \leftarrow تا (س) = \frac{2}{س}$$

و (ي) تمثيلها البياني بالنسبة إلى معلم متعامد متجانس (م ، و ، ي)

1. عين مجموعة تعريف تا .
2. بين أن تا فردية .
3. ادرس تغيرات الدالة تا من المجال $[0, +\infty[$.
4. هل أ (-2 ، -1) ، ب (3 ، 2) هما نقطتان من المنحني (ي) الممثل للدالة تا ؟

الحل :

1. لنعين مجموعة تعريف تا .

$$لدينا تا (س) = \frac{2}{س}$$

الكسر $\frac{2}{s}$ غير معين من أجل $s = 0$

فالدالة $\frac{2}{s}$ غير معرفة من أجل $s = 0$

إذن مجموعة تعريف $\frac{2}{s}$ هي \mathbb{C}^*
أي :

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

2. لنبين أن $\frac{2}{s}$ فردية

لدينا :

$$\frac{2}{-s} = -\left(\frac{2}{s}\right)$$

$$\forall s \in \mathbb{C}^* : -\frac{2}{s} = -\left(\frac{2}{s}\right) \quad \text{و} \quad \frac{2}{s} = \left(\frac{2}{s}\right) \quad \text{و} \quad -\frac{2}{-s} = \frac{2}{s}$$

إذن $\frac{2}{s}$ فردية

3. لندرس تغيرات الدالة $\frac{2}{s}$ في المجال $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

ليكن s_1, s_2 عنصرين مختلفين من $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

لدينا :

$$\frac{\frac{2}{s_1} - \frac{2}{s_2}}{\frac{2}{s_1} - \frac{2}{s_2}} = \frac{\frac{2(s_2 - s_1)}{s_1 s_2}}{\frac{2(s_2 - s_1)}{s_1 s_2}}$$

$$\frac{2(s_2 - s_1)}{s_1 s_2} = \frac{2(s_2 - s_1)}{s_1 s_2}$$

$$\frac{2(s_2 - s_1)}{s_1 s_2} = \frac{2(s_2 - s_1)}{s_1 s_2}$$

$$\left(\frac{2}{s_1} - \frac{2}{s_2}\right) \neq 0 \quad \text{لأن } s_1 \neq s_2$$

فنسبة تزايد $\frac{2}{s}$ سالبة لأن s_1, s_2 موجبان

$$\text{وبالتالي : } 0 > \frac{\text{تا} (س_2) - \text{تا} (س_1)}{س_2 - س_1}$$

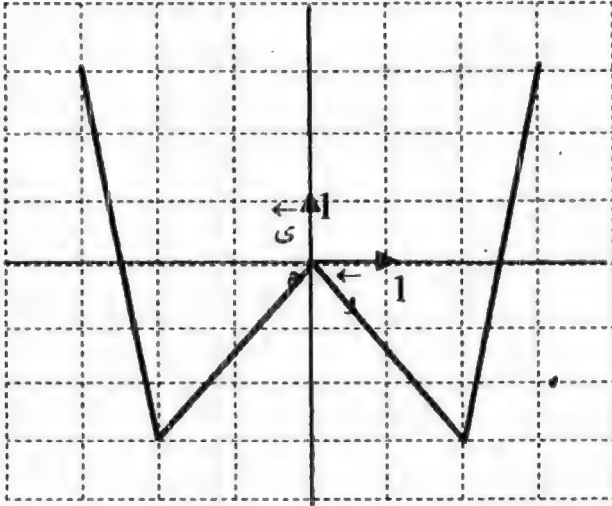
فالدالة تا متناقصة في المجال $[0, +\infty]$
 4. إحدائيا كل نقطة من المنحني (ي) هما (س، تا (س))
 لدينا :

$$\text{تا} (2) = \frac{2}{2-} = 1 - \text{ إذن أ } (ي)$$

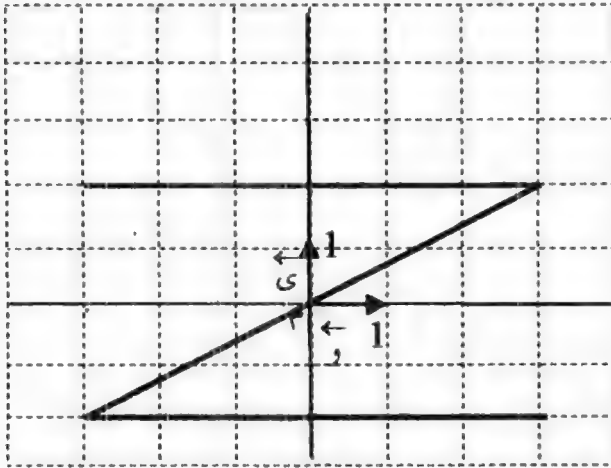
$$\text{و تا} (3) = \frac{2}{3} \neq 2 \text{ إذن ب } (ي)$$

1. نعتبر الأشكال الآتية بالنسبة إلى معلم متعامد متجانس (م ، و ، ي) :

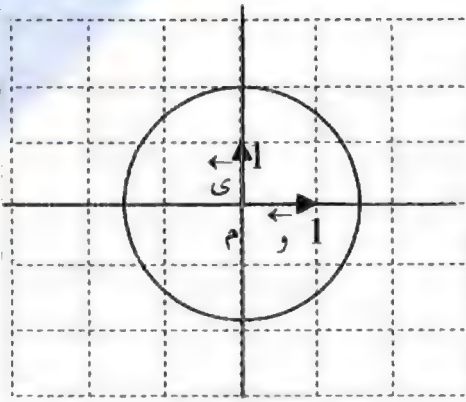
الشكل (1)



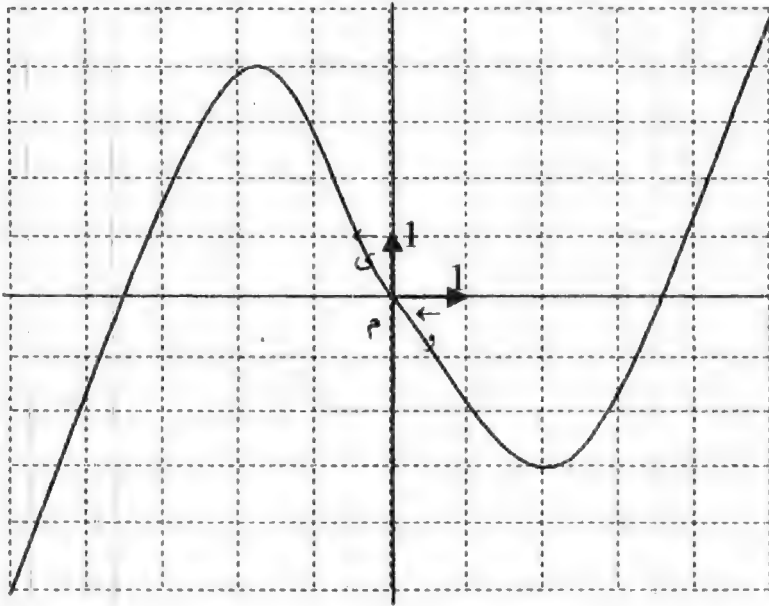
الشكل (2)



الشكل (3)

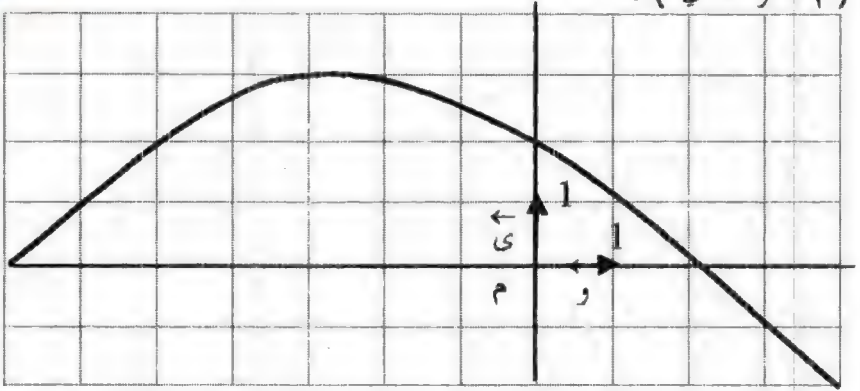


الشكل (4)

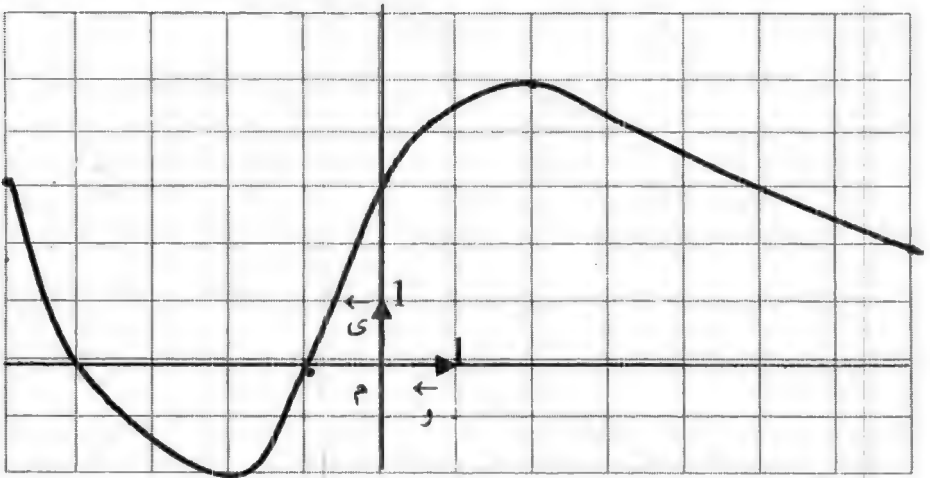


- (1) أي التمثيلات البيانية يمثل دالة ؟
 (2) أي التمثيلات يمثل دالة فردية ؟ وأيها يمثل دالة زوجية ؟

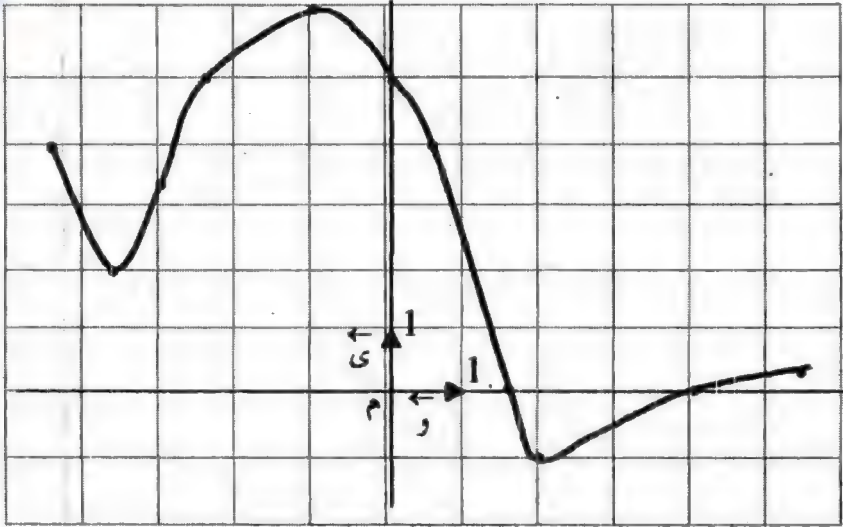
2. الشكل الآتي يمثل بيان دالة τ ، بالنسبة إلى معلم متعامد متجانس $(\vec{m}, \vec{r}, \vec{y})$.



1. حدد مجموعة تعريف τ
 2. ماهي صور - 3 ، 0 ، 2 بالدالة τ ؟
 3. شكل جدول تغيرات الدالة τ
3. (\vec{y}) هو بيان دالة τ في معلم متعامد متجانس $(\vec{m}, \vec{r}, \vec{y})$.
 بقراءة لهذا البيان :



1. عيّن مجموعة تعريف تا
2. عيّن الصور : تا (2) ، تا (5) ، تا (0) ، تا (7) ، تا (-4)
3. عيّن سوابق العدد 3
4. تا دالة ممثلها البياني (ي) .



1. عيّن مجموعة تعريف تا
2. حل بيانيا "المعادلات :
- تا (س) = 5 ، تا (س) = 0 ، تا (س) = -1

5. عيّن مجموعة التعريف لكل من الدوال التالية

$$(1) \text{ تا (س) } = \frac{1}{3-2س}$$

$$(2) \text{ تا (س) } = \frac{1}{|س|}$$

$$(3) \text{ تا (س) } = \frac{1}{1-|س|}$$

$$(4) \text{ تا (س) } = \sqrt{س}$$

$$(5) \text{ تا (س) } = \frac{1}{\sqrt{س}}$$

$$(6) \text{ تا (س) } = \frac{1}{(س-2)(1-س)}$$

$$(7) \text{ تا (س) } = \sqrt{1-س}$$

$$(8) \text{ تا (س) } = \sqrt{4-س^2}$$

6. عيّن مجموعة تعريف الدالة ثم بيّن إن كانت زوجية أو فردية في كل حالة مما يلي :

$$\sqrt[2]{s+1} = (s) \text{ تا } (2)$$

$$(1) \text{ تا } (s) = s + \frac{1}{s}$$

$$(3) \text{ تا } (s) = \frac{s}{1+s^2} ; (4) \text{ تا } (s) = \sqrt{s} ; (5) \text{ تا } (s) = s \sqrt{s}$$

7] تا و ها دالتان معرفتان كما يلي :

$$\text{ها : } s \longleftarrow -s^3$$

$$\text{تا : } s \longleftarrow -s^2 \text{ و}$$

(1) عيّن مجموعة تعريف كل منهما .

(2) ادرس تغيرات تا في المجال $]-\infty, 0]$ وتغيرات الدالة ها في المجال $[0, +\infty]$

8] تا و ها دالتان معرفتان كما يلي :

$$\text{ها : } s \longleftarrow -\frac{1}{s-2}$$

$$\text{تا : } s \longleftarrow -\frac{1}{s}$$

(1) عيّن مجموعة تعريف كل منهما .

(2) بيّن أن :

- تا متزايدة في المجال $]-\infty, 1[$

- ها متزايدة في المجال $[0, 2]$

9] تا دالة معرفة كما يلي :

$$\text{تا : } s \longleftarrow \sqrt{s}$$

(1) عيّن مجموعة تعريف تا

(2) بيّن أن تا متزايدة في المجال $[0, 1]$

10] تا دالة معرفة كما يلي :

$$\text{تا : } s \longleftarrow -4s^2 + 1$$

(1) عيّن مجموعة تعريف تا

(2) بيّن أن تا دالة زوجية

(3) بيّن أن الدالة تا متزايدة في المجال $[2, 5]$ وأنها متناقصة في المجال $]-1, 0]$.

1. نشاط تمهيدي

- لتكن الدالة العددية α : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ س-3 .
1. أحسب نسبة تزايد الدالة α في \mathbb{R} ، ماذا تستنتج ؟
 2. مثل المستقيم (ق) : $\alpha = 5$ س-3 بالنسبة إلى معلم (م ، و ، ي) .
 3. كيف تختار قيم المتغير س لكي يكون $\alpha(س) < 10$ ؟
 4. كيف تختار قيم المتغير س لكي يكون $\alpha(س) > -10$ ؟

2. دراسة الدالة التآلفية : α س \rightarrow أ س + ب

(1) تعريف

نسمي دالة تآلفية كل دالة عددية لمتغير حقيقي س معرفة كما يلي :

$\alpha(س) = أ س + ب$ حيث أ ، ب عدنان حقيقيان و $أ \neq 0$

حالات خاصة

- إذا كان ب = 0 نقول إن α دالة خطية
- إذا كلن أ = 0 تكون الدالة α ثابتة

أمثلة

- الدالة : α س \rightarrow 3 س - 8 هي دالة تآلفية
 - الدالة : α س \rightarrow 2 س هي دالة خطية
 - الدالة : α س \rightarrow 3 هي دالة ثابتة
 - الدالة : α س \rightarrow 2 ليست دالة تآلفية
- (2) - دراسة الدالة α : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ س \rightarrow 3 س - 8
- مجموعة التعريف .

الدالة α معرفة في \mathbb{R} .

$$ف =] - \infty , + \infty [$$

١. اتجاه التغير

من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين s_1 و s_2 لدينا :

$$3 = \frac{(s_2 - (8 - s_1^3)) - (s_1 - (8 - s_2^3))}{s_1 - s_2} = \frac{(s_2 - 8 + s_1^3) - (s_1 - 8 + s_2^3)}{s_1 - s_2}$$

نسبة التزايد موجبة ، فالدالة α متزايدة في α

٢. دراسة الدالة α عندما تأخذ $|s|$ قيما كبرى

الجدول التالي يتضمن بعض القيم الكبيرة للمتغير s وقيم $\alpha(s)$ المناسبة

s	10	10^2	10^3	10^4
$\alpha(s)$	22	292	2992	29992

نلاحظ أن قيم $\alpha(s)$ تكون كبيرة، أكثر فأكثر بقدر ما يكون s كبيرا .

هل يمكن جعل $\alpha(s)$ كبيرا بالقدر الذي نريد ؟

أي هل يمكن جعل $\alpha(s)$ أكبر من أي عدد معلوم α ؟
لدينا :

$$\alpha < \alpha(s) \Leftrightarrow 3 - s < 8 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow s < \frac{8 + \alpha}{3}$$

ومنه لكي يكون $\alpha(s) < \alpha$ يكفي أن يكون $s < \frac{8 + \alpha}{3}$

فمثلا لكي يكون $\alpha(s) < 10^6$ يكفي أن يكون $s < \frac{8 + 10^6}{3}$

نقول في هذه الحالة :

$\alpha(s)$ يؤول إلى زائد لانهاية عندما يؤول s إلى زائد لانهاية ونكتب :

$$\alpha(s) \xrightarrow{+\infty} \text{عندما } s \xrightarrow{+\infty}$$

ليكن الآن الجدول التالي :

s	10^-	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\alpha(s)$	38^-	308^-	3008^-	30008^-

نلاحظ في هذا الجدول أن قيم (- تا (س)) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون (- س) كبيراً". فحسب الحالة السابقة يمكن القول :

(- تا (س)) $\leftarrow \infty+$ عندما (- س) $\leftarrow \infty+$

نقول في هذه الحالة :

"تا (س) يؤول إلى ناقص لانهائية عندما يؤول س إلى ناقص لانهائية .

ونكتب : تا (س) $\leftarrow \infty-$ عندما س $\leftarrow \infty-$

. جدول التغيرات

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

س	
$\infty -$	$\infty +$
3-س-8	$\infty +$
$\infty -$	$\infty +$

. التمثيل البياني

ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس (م ، و ، ع) .

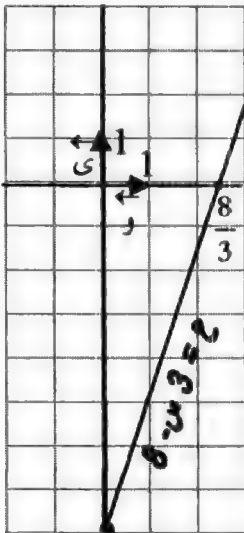
التمثيل البياني للدالة تا : س $\leftarrow 3-8$ هو مجموعة النقطن (س ، ع)

من المستوي حيث : س و ح و ع = 3-س-8

المعادلة ع = 3-س-8 هي معادلة المستقيم الذي

يقطع المحورين في النقطتين :

$$(0, \frac{8}{3}), (8, 0)$$



3) دراسة الدالة α : $\alpha \rightarrow 1 - 2$ س + 1
مجموعة التعريف.

الدالة α معرفة في ح .

ف $\alpha - [= \alpha + ,]$
اتجاه التغير .

من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين α_1 و α_2 لدينا :

$$2 - = \frac{(1 + \alpha_2 - 2) - (1 + \alpha_1 - 2)}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1 + \alpha_2) - (1 + \alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

نسبة التزايد سالبة ، فالدالة α متناقصة في ح .

دراسة الدالة α عندما تأخذ α قيمة كبرى

الجدول التالي يتضمن بعض القيم الكبيرة للمتغير α وقيم α (س) المناسبة .

س	10	10^2	10^3	10^4
α (س)	19-	199-	1999-	19999-

نلاحظ أن قيم (- α) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون س كبيراً .

هل يمكن جعل (- α) أكبر من أي عدد معلوم α ؟

لدينا : - α (س) $\Leftrightarrow \alpha < 1 - 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \alpha}{2} < \alpha$$

فمثلاً لكي يكون (- α) (س) $\alpha < 1$ يكفي أن يكون س $\frac{1 + \alpha}{2}$

ومنه لكي يكون - α (س) $10^6 < \alpha$ يكفي أن يكون س $\frac{1 + 10^6}{2}$

نقول في هذه الحالة :

α (س) يؤول إلى ناقص لانهاية عندما يؤول س إلى زائد لانهاية

ونكتب : α (س) $\rightarrow -\infty$ عندما س $\rightarrow +\infty$.

ليكن الآن الجدول التالي :

.....	$10 - 4$	$10 - 3$	$10 - 2$	$10 - 1$	س
.....	20001	2001	201	21	تا (س)

نلاحظ ، في هذا الجدول ، أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون (س -) كبيراً .

فحسب الحالة السابقة يمكن القول :

تا (س) يؤول إلى زائد لانهائية عندما يؤول (س -) إلى زائد لانهائية .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى زائد لانهائية عندما يؤول س إلى ناقص لانهائية

ونكتب :

تا (س) $\leftarrow \infty +$ عندما س $\leftarrow -\infty$.

• جدول التغيرات :

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

$\infty +$	$\infty -$	س
	$\infty +$	$2 - س + 1$
$\infty -$		

• التمثيل البياني :

ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس

(م ، و ، ع) .

التمثيل البياني للدالة س $\leftarrow 2 - س + 1$

هو مجموعة النقط ن (س ، ع) من

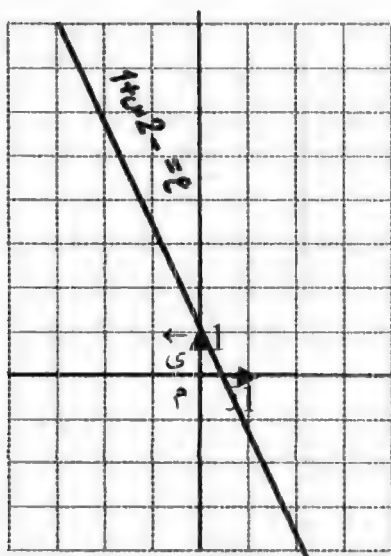
المستوي حيث : س و ع ، $2 - س + 1 = ع$.

المعادلة :

ع $= 2 - س + 1$ هي معادلة

المستقيم الذي يقطع المحورين في

النقطتين : (0 ، $\frac{1}{2}$) ، (1 ، 0)



($0 \neq 1$)

(4) دراسة الدالة f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالتعبير :

الدالة f معرفة في \mathbb{R} .

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

إتجاه التغير :

من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين s_1 و s_2 لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1} &= \frac{\frac{s_2^2 - 1}{s_2^2 + 1} - \frac{s_1^2 - 1}{s_1^2 + 1}}{s_2 - s_1} \\ &= \frac{(s_2^2 - 1)(s_1^2 + 1) - (s_1^2 - 1)(s_2^2 + 1)}{(s_2 - s_1)(s_2^2 + 1)(s_1^2 + 1)} \\ &= \frac{(s_2^2 s_1^2 + s_2^2 - s_1^2 - 1) - (s_1^2 s_2^2 + s_1^2 - s_2^2 - 1)}{(s_2 - s_1)(s_2^2 + 1)(s_1^2 + 1)} \\ &= \frac{s_2^2 - s_1^2}{(s_2 - s_1)(s_2^2 + 1)(s_1^2 + 1)} \\ &= \frac{(s_2 - s_1)(s_2 + s_1)}{(s_2 - s_1)(s_2^2 + 1)(s_1^2 + 1)} \\ &= \frac{s_2 + s_1}{(s_2^2 + 1)(s_1^2 + 1)} \end{aligned}$$

إشارة نسبة تزايد الدالة f هي إشارة A .

نميز ثلاث حالات :

- إذا كان $A = 0$ تكون الدالة f ثابتة في \mathbb{R}
- إذا كان $A < 0$ تكون الدالة f متزايدة في \mathbb{R}
- إذا كان $A > 0$ تكون الدالة f متناقصة في \mathbb{R}


دراسة الدالة f عندما يأخذ $|s|$ قيمة كبرى :


بتعميم نتائج المثالين السابقين نجد :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{تأ}(s) \leftarrow -\infty & \text{عندما } s \leftarrow +\infty \\ \text{تأ}(s) \leftarrow +\infty & \text{عندما } s \leftarrow -\infty \end{array} \right\} \text{ إذا كان } A < 0 \text{ فإن :}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{تأ}(s) \leftarrow -\infty & \text{عندما } s \leftarrow +\infty \\ \text{تأ}(s) \leftarrow +\infty & \text{عندما } s \leftarrow -\infty \end{array} \right\} \text{ إذا كان } A > 0 \text{ فإن :}$$

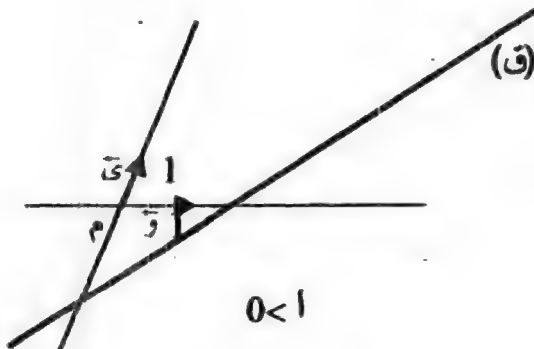
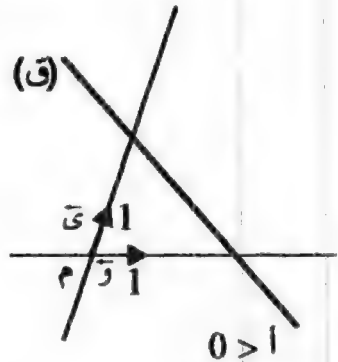
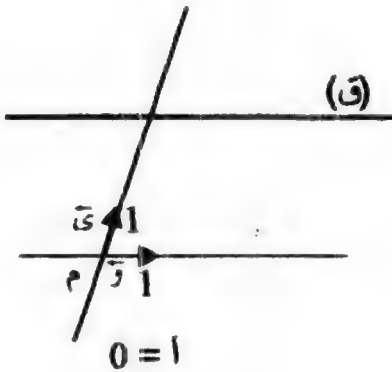
• جدول التغيرات :

$0 > 1$		
$\infty +$	$\infty -$	س
		اس+ب

$0 < 1$		
$\infty +$	$\infty -$	س
		اس+ب

• التمثيل البياني :

التمثيل البياني للدالة التآلفية تا : س \leftarrow اس+ب هو مستقيم (ق)
معامل توجيهه هو العدد أ ويقطع محوري الإحداثيات في النقطتين :
 $(0, -\frac{b}{a})$ ، $(b, 0)$.



3. تطبیقات

(1) شرط توازي مستقيمين :

ليكن المستقيمان :

$$(ق_1) : ع = اس + ب ، 0 \neq ا$$

$$(ق_2) : ع = اس + ب ، 0 \neq ا$$

لنبحث عن شرط توازيهما .
لدينا :

$$(ق_1) : اس - ع + ب = 0 \quad \text{شعاع توجيهه } \begin{pmatrix} 1 \\ ا \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$(ق_2) : اس - ع + ب = 0 \quad \text{شعاع توجيهه } \begin{pmatrix} 1 \\ ا \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$(ق_1) // (ق_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ ا \end{pmatrix} \leftarrow // \begin{pmatrix} 1 \\ ا \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ ا & ا \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$0 = 1 - 1 \Leftrightarrow$$

$$1 = 1 \Leftrightarrow$$

ومنه :

يتوازي مستقيمان إذا وفقط إذا كان لهما معامل التوجيه نفسه

مثال :

$$(ق_1) : ع = اس + 1 \quad \text{و} \quad (ق_2) : ع = 2س + 3 \quad \text{مستقيمان متوازيان .}$$

$$(ق_1) : ع = 2س + 1 \quad \text{و} \quad (ق_2) : ع = 3س + 5 \quad \text{مستقيمان غير متوازيين}$$

(2) شرط تعامد مستقيمين :

ليكن المستقيمان :

$$(ق_1) : ع = اس + ب ، 0 \neq ا \quad \text{شعاع توجيهه } \begin{pmatrix} 1 \\ ا \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$(ق_2) : ع = اس + ب ، 0 \neq ا \quad \text{شعاع توجيهه } \begin{pmatrix} 1 \\ ا \end{pmatrix} \leftarrow$$

ولنبحث عن شرط تعامدهما

لدينا : $(ق_1) \perp (ق_2) \Leftrightarrow \vec{ش_1} \perp \vec{ش_2}$

نعلم أنه إذا كان الشعاعان $\vec{ش_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\vec{ش_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ متعامدين

فإن $1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$ أي $1 + 1 = 0$ ومنه :

يتعامد مستقيمان إذا فقط إذا كان جداء معاملي توجيهيهما مساويا - 1

(3) الحل البياني لجملة معادلتين :
مثال :

$$\left. \begin{array}{l} 2س + ع - 3 = 0 \\ 3س - ع - 2 = 0 \end{array} \right\} \text{ لنحل بيانيا الجملة الخطية :}$$

لحل هذه الجملة بيانيا :

• نرسم بالنسبة إلى معلم (م، و، ع) كلا من المستقيمين :

$$(ق_1) : 2س + ع - 3 = 0$$

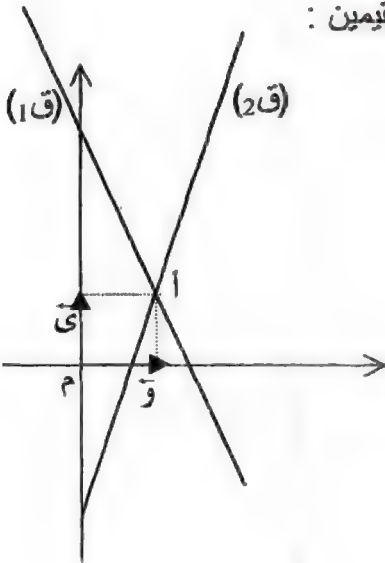
$$(ق_2) : 3س - ع - 2 = 0$$

ونحدد نقطة التقاطع ولتكن أ

• نقرأ في الرسم البياني إحداثيي النقطة أ

فنحصل على الثنائية (1، 1) التي هي حل

الجملة المفروضة .



(4) لرسم بيان الدالة : $s \mapsto |s+2|$

• أنكتب $|s+2|$ بدون رمز القيمة المطلقة

لدينا : $|s+2| = s+2$ إذا كان $s \leq -2$

$|s+2| = -s-2$ إذا كان $s \geq -2$

ومنه كتابة الدالة بدون قيمة مطلقة :

• في المجال $]-\infty, -2]$: $s \mapsto -s-2$

• في المجال $]-2, +\infty[$: $s \mapsto s+2$

لتمثيل الدالة $s \mapsto |s+2|$ نرسم المستقيمين :

(ق) : $s+2 = 0$ حيث $s \leq -2$

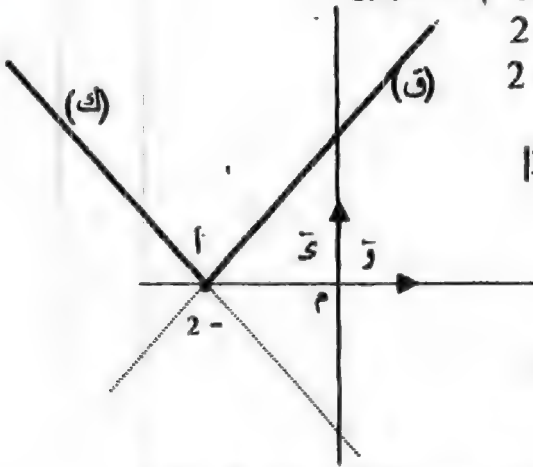
(ك) : $-s-2 = 0$ حيث $s \geq -2$

الشكل :

التمثيل البياني للدالة $s \mapsto |s+2|$

هو اتحاد نصفتي المستقيمين

المرسومين بخط غليظ .



• لتعين الدالة تا : $s \mapsto |s+2|$

الممثلة بالمستقيم (ق) الذي يشمل

النقطتين $N_1(1,1)$ و $N_2(2,3)$.

نعلم أن المعادلة المختصرة للمستقيم (ق) هي من الشكل : $s+2 = 0$

ولنبحث عن المعاملين أ و ب .

لدينا :

$$N_1(1,1) \Rightarrow (ق) \quad 1 \times 1 + 2 = 3$$

$$N_2(2,3) \Rightarrow (ق) \quad 2 \times 2 + 2 = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 1 \times 1 + 2 \\ 3 = 2 \times 2 + 2 \end{array} \right\} \text{إن أ و ب هما حل الجملة}$$

بحل هذه الجملة نحصل على $1 = 2$ و $3 = 2$

فالدالة المطلوبة هي : $s \mapsto |s+2|$

• لتعين الدالة تا : $s \mapsto |s+2|$ الممثلة بالمستقيم (ق) الذي يشمل النقطة

$$N_1(0, 2) \text{ ويوازي الشعاع } \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right)$$

نعين معادلة مستقيم (ق) يشمل N_1 ويوازي الشعاع $\overleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

لتكن N (س، ع) نقطة من المستوى .

$$\overleftarrow{N_1}^S = \begin{pmatrix} S \\ 2+E \end{pmatrix}$$

$$N \ni (ق) \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} 1 & S \\ 3 & 2+E \end{vmatrix}$$

$$0 = 3S - (2+E) \Leftrightarrow$$

$$E = 3S - 2 \Leftrightarrow$$

فالدالة المطلوبة هي : $S \longleftarrow 3S - 2$.

تمارين

1. ادرس تغيرات كل من الدوال الآتية :

- شكل جدول تغيرات كل منها .
 - أنشئ ممثل كل منها بالنسبة إلى معلم متعامد متجانس (م، و، ق) .
- | | |
|--|--|
| (1) س ← س - 3 | (2) س ← س - 3 - س - 3 |
| (3) س ← س - $\frac{س}{3}$ + 5 | (4) س ← س - س |
| (5) س ← س - 0,5 - س - 3 | (6) س ← س - 4 - س + 6 |
| (7) س ← س - $\frac{س^2}{3}$ - 2 | (8) س ← س - 2 |
| (9) س ← س - 3 | (10) س ← س - $\frac{1}{2}$ |
| (11) س ← س - $\frac{1}{3}$ س | (12) س ← س - $\frac{3-س}{2}$ |
| (13) س ← س - $\frac{2}{3}$ (س + 2) + 2 | (14) س ← س - $\frac{1}{3}$ (س + 3) - 2 |

2. ادرس تغيرات كل من الدوال الآتية :

- أكتب كلا منها بدون رمز القيمة المطلقة .
 - شكل جدول تغيرات كل منها حسب كل مجال .
 - مثل كلا منها بالنسبة إلى معلم متعامد متجانس (م، و، ق) .
- | | |
|---------------------|--------------------------|
| (1) س ← س | (2) س ← س - 1 |
| (3) س ← س + 3 | (4) س ← س - 2 |
| (5) س ← س + 3 | (6) س ← س - 3 |
| (7) س ← س + 1 + 2 | (8) س ← س - 3 - س + 2 |

3. أرسم في معلم متعامد متجانس كلا من المستقيمات الآتية :

- عين من بينها المستقيمات المتوازية
- عين من بينها المستقيمات المتعامدة

(ق ₂) : ع = 2س + 3	،	(ق ₁) : ع = -س + 1
(ق ₄) : ع = 5س -	،	(ق ₃) : ع = 3س - 4
(ق ₆) : ع = $\frac{1}{3}$ س + 2	،	(ق ₅) : ع = $\frac{1}{5}$ س + 1
(ق ₈) : ع = 3(س + 2)	،	(ق ₇) : ع = 4س -
(ق ₁₀) : ع = 8(س + 2) - 12	،	(ق ₉) : ع = $\frac{1}{2}$ س + 2

4. عين الدالة التي يمثلها المستقيم (ق) في الحالات التالية :

(1) (ق) يشمل النقطتين أ(5،1) و ب(3، - $\frac{1}{2}$)

(2) (ق) يشمل النقطتين أ(2،-1) و ب(0،-1)

(3) (ق) يشمل النقطتين م(0،0) و أ(-2، $\frac{1}{2}$)

5. عين الدالة الممثلة بمستقيم (ق) في الحالات التالية :

(1) (ق) يشمل النقطة أ(1، 3) ويوازي الشعاع $\vec{s} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) (ق) يشمل النقطة أ(0،1) ويوازي الشعاع $\vec{s} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) (ق) يشمل النقطة أ(-2،1) ويوازي الشعاع $\vec{s} \begin{pmatrix} 3 \\ 1- \end{pmatrix}$

س	3-	2-	1-	$\frac{1}{2}-$	$\frac{1}{4}-$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1+	2+	3+
s^2

• من الجدول أوجد قيم s التي تحقق $s < s^2$ ، وقيم s التي تحقق $s > s^2$

• حل في ح المتراجحة $s < s^2$ ثم تحقق من نتائج السؤال السابق .

دراسة الدالة $s \mapsto s^2$

(1) دراسة الدالة $s \mapsto s^3$

مجموعة التعريف :

الدالة $s \mapsto s^3$ معرفة في \mathbb{R} .

• اتجاه التغير :

من أجل كل عددين حقيقيين s_1 و s_2 لدينا :

$$\frac{s_1^3 - s_2^3}{s_1 - s_2} = \frac{(s_1 - s_2)(s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2)}{s_1 - s_2} = s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2$$

$$= 3(s_1 + s_2)$$

إشارة نسبة تزايد الدالة $s \mapsto s^3$ هي إشارة $3(s_1 + s_2)$

• إذا كان s_1 و s_2 من المجال $]-\infty, 0]$ فإن $3(s_1 + s_2) < 0$

• إذا كان s_1 و s_2 من المجال $]0, +\infty[$ فإن $3(s_1 + s_2) > 0$

وبالتالي :

تأ متناقصة في المجال $]-\infty, 0]$ و متزايدة في المجال $]0, +\infty[$.

لدينا : تا(0) = 0 و \forall س د ح : $3 \leq 2$ س 0
 إذن تا(س) \leq تا(0) وهذا يعني أن أصغر قيمة للدالة تا هي 0 .
 • دراسة الدالة تا : س $\longleftarrow 3 \leq 2$ س عندما يأخذ |س| قيمة كبرى :
 بإعطاء المتغير س قيمة موجبة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول):

س	10	10^2	10^3
تا(س) = $3 \leq 2$ س	300	30000	3000000

نجد أن الصور تا(س) موجبة تكبر أكثر فأكثر عندما تكبر قيم المتغير س
 نقول في هذه الحالة :

تا(س) يؤول إلى زائد لانهائية عندما س يؤول إلى زائد لانهائية
 ونكتب :

تا(س) $\longleftarrow +\infty$ عندما س $\longleftarrow +\infty$
 وبإعطاء س قيمة سالبة ، قيمها المطلقة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول)

س	10-	10^2 -	10^3 -
تا(س) = $3 \leq 2$ س	300	30000	3000000

نجد أن الصور تا (س) موجبة وتكبر أكثر فأكثر عندما تكبر القيم المطلقة
 للمتغير س . نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى زائد لانهائية عندما س يؤول إلى ناقص لانهائية .
 ونكتب :

تا(س) $\longleftarrow +\infty$ عندما س $\longleftarrow -\infty$
 • جدول تغيرات س $\longleftarrow 3 \leq 2$ س
 نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

س	$\infty -$	0	$\infty +$
تا(س) = $3 \leq 2$ س	$\infty +$	0	$\infty +$

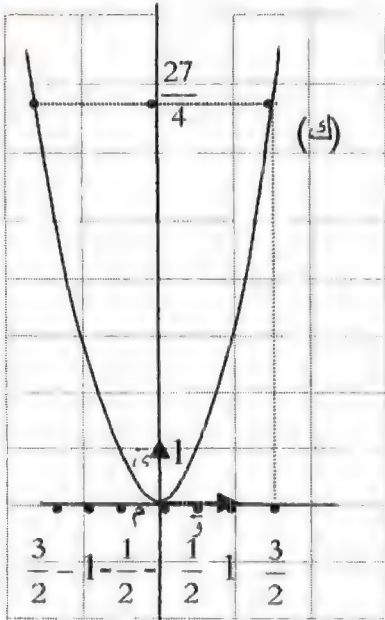
لتمثيل البياني للدالة : $s \mapsto 3s^2$:

ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس (م، و، ي) .

الممثل البياني (ك) للدالة : $s \mapsto 3s^2$ هو مجموعة النقط

ن (س، ع) بحيث : $s \in \mathbb{R}$ و $ع = 3s^2$.

لرسم (ك) نشكل جدولاً يتضمن إحداثيات بعض النقط من (ك) .



س	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$ع = 3s^2$	$\frac{27}{4}$	3	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{27}{4}$

هذه النقط هي نقط من منحن (ك) يسمى قطعاً مكافئاً (الشكل). النقطة م تسمى ذروة هذا القطع . محور الترتيب هو محور تناظر لهذا القطع

(2) دراسة تغيرات الدالة : $s \mapsto -s^2$: مجموعة التعريف .

الدالة $s \mapsto -s^2$ معرفة في \mathbb{R} : $[-\infty, +\infty]$

• اتجاه التغير .

من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين s_1, s_2 لدينا :

$$(s_2) - (s_1) = \frac{(s_2)^2 - (s_1)^2}{s_2 + s_1} = \frac{(s_2 - s_1)(s_2 + s_1)}{s_2 + s_1} = s_2 - s_1$$

إذا كان s_1, s_2 من المجال $[0, \infty)$ فإن $-(s_1 + s_2) < 0$
وإذا كان s_1, s_2 من المجال $[0, \infty)$ فإن $-(s_1 + s_2) > 0$
فالدالة $s \mapsto -s^2$ متزايدة في المجال $[0, \infty)$
و متناقصة في المجال $[-\infty, 0]$

لدينا : $0 = (0)$ و $\forall s \in \mathbb{R} : -s^2 \geq 0$
إذن $(s) \geq (0)$ وهذا يعني أن أكبر قيمة للدالة τ هي (0)
نقول إن (0) هي القيمة الكبرى للدالة τ .

• دراسة الدالة $s \mapsto -s^2$ عندما يأخذ $|s|$ قيما "كبيرة"

• لنعط للمتغير s بعض القيم الموجبة الكبيرة أكثر فأكثر ونحسب صورها
(الجدول)

s	10^2	10^3	10^4
$\tau(s) = -s^2$	-100	-1000000	-100000000

نجد أن القيم المطلقة للصور $\tau(s)$ تكبر أكثر فأكثر عندما تكبر قيم s .
نقول في هذه الحالة :

$\tau(s)$ (s) يؤول إلى ناقص لانهاية عندما يؤول s إلى زائد لانهاية .

ونكتب : $\tau(s) \mapsto -\infty$ عندما $s \mapsto +\infty$

• لنعط الآن للمتغير s بعض القيم السالبة التي قيمها المطلقة كبيرة أكثر فأكثر
ونحسب صورها (الجدول)

s	-10^2	-10^3	-10^4
$\tau(s) = -s^2$	-100	-1000000	-100000000

فنجد أن القيم المطلقة للصور $\tau(s)$ تكبر أكثر فأكثر عندما تكبر القيم المطلقة
للمتغير s .

نقول في هذه الحالة :

$\tau(s)$ (s) يؤول إلى ناقص لانهاية عندما يؤول s إلى ناقص لانهاية .
ونكتب :

$\tau(s) \mapsto -\infty$ عندما $s \mapsto -\infty$

• جدول التغيرات

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

$\infty +$	0	$\infty -$	س
$\infty -$	0	$\infty -$	تا (س) = $-s^2$

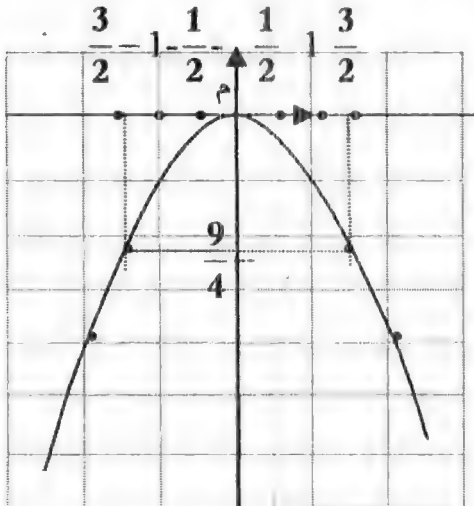
• التمثيل البياني للدالة : $s \rightarrow -s^2$

ينسب المستوى إلى معلم متعامد متجانس (م، و، ع)

الممثل البياني للدالة $s \rightarrow -s^2$ هو مجموعة النقطن (س، ع) حيث :
 $s \geq 0$ ح و $E = -s^2$

لرسم (ك) نشكل جدولا يتضمن إحداثيات بعض النقطن من (ك) :

2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1-	$\frac{3}{2}$	2-	س
4-	$\frac{9}{4}$	1-	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1-	$\frac{9}{4}$	4-	تا (س) = $-s^2$



النقاطن (س، ع) هي نقاط
من منحن يسمى أيضا"
قطعا مكافئا (الشكل) .

(3) . دراسة الدالة $f(x) = x^2 - 2x + 1$: $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) \neq 0$

• مجموعة التعريف :

الدالة $f(x) = x^2 - 2x + 1$ معرفة في \mathbb{R}

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

• اتجاه التغير

من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x_1, x_2 لدينا :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - 2x_2 + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{x_2^2 - x_1^2 - 2x_2 + 2x_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

إشارة نسبة تزايد الدالة $f(x)$ هي إشارة $(x_2 + x_1)$. نميز حالتين حسب إشارة A :

• $A < 0$:

في المجال $]-\infty, 0]$ يكون $x_2 + x_1 > 0$ والجاء $A > 0$

في المجال $]0, +\infty[$ يكون $x_2 + x_1 < 0$ والجاء $A < 0$: $A > 0$:

في المجال $]-\infty, 0]$ يكون $x_2 + x_1 > 0$ والجاء $A < 0$

في المجال $]0, +\infty[$ يكون $x_2 + x_1 < 0$ والجاء $A > 0$ ومنه :

• إذا كان $A < 0$ فإن الدالة $f(x)$ متناقصة في المجال $]-\infty, 0]$ ومتزايدة في المجال $]0, +\infty[$.

• إذا كان $A > 0$ فإن الدالة $f(x)$ متزايدة في المجال $]-\infty, 0]$ ومتناقصة في المجال $]0, +\infty[$.

دراسة $f(x)$ عندما $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$

نميز حالتين حسب المثالين المدروسين سابقا :

• $A < 0$:

• $f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

• $f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$

• $A > 0$:

• $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

• $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$

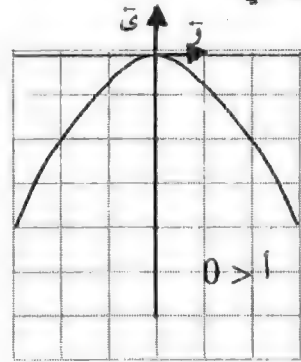
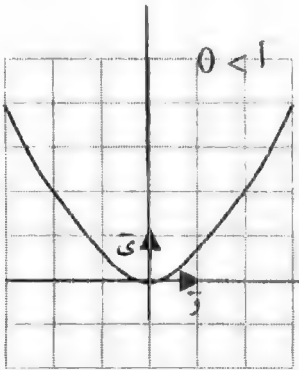
• جدول تغيرات الدالة $s \longleftarrow s^2$

نلخص نتائج الدراسة السابقة في الجدولين الآتيين حسب إشارة A .

$0 > A$			س
$\infty +$	0	$\infty -$	تا(س) = s^2
$\infty -$	0	$\infty -$	

$0 < A$			س
$\infty +$	0	$\infty -$	تا(س) = s^2
$\infty -$	0	$\infty +$	

• التمثيل البياني



• لنعين الدالة تا : $s \longleftarrow s^2$ التي ممثلها (ي) يشمل النقطة $(3,1)$.

لدينا معادلة (ي) هي من الشكل : $s^2 = ع$

$$3 = 1 \Leftrightarrow (ي) \Rightarrow$$

$$3 = 1 \Leftrightarrow$$

فالدالة التي ممثلها البياني (ي) هي : $s \longleftarrow 3 s^2$

لنحل المعادلة : $4 = s^2$.

• نرسم كلا من القطع المكافئ (ق) و

الدالة $s \mapsto s^2$ والمستقيم

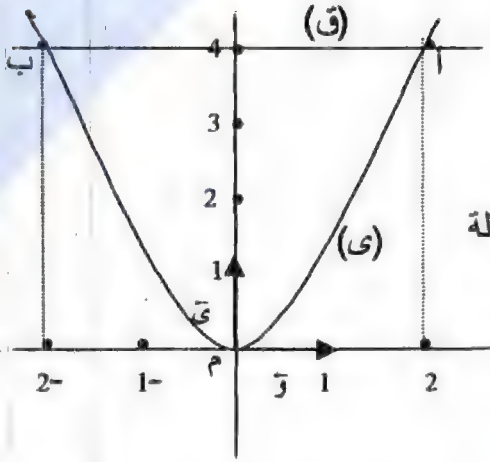
(ق) : $4 = s$

نقرأ فاصلتي أ و ب نقطتي تقاطع

(ق) و (و) إن وجدت فنحصل على

العديدين $s^2 - 2$ و $2 - s^2$ اللذين هما حلا المعادلة

$s^2 = 4$.



(3) تقاطع مستقيم ومكافئ

مثال

ليكن القطع المكافئ : (ك) : $s^2 = -s$ والمستقيم (ق) : $s = 2$.

نقاط تقاطع (ك) و (ق) ، إن وجدت ، هي النقاط (س، ع) التي تحقق إحداثيا كل

منها في آن واحد معادلتَي القطع (ك) والمستقيم (ق) .

أي أن فواصل النقطن (س، ع) هي حلول المعادلة : $s^2 = 2 - s$ ذات المجهول س

لدينا :

$$s^2 = 2 - s \Leftrightarrow s^2 + s - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s(s + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow s = 0 \text{ أو } s = -1$$

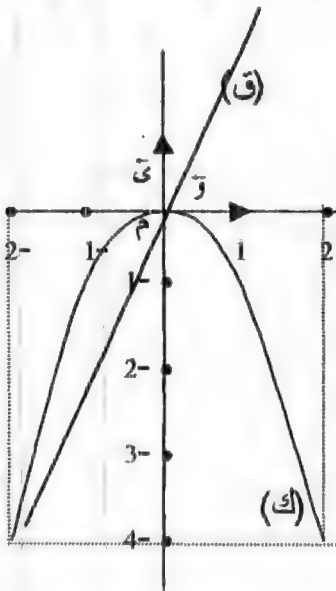
ترتيباً نقطتي التقاطع هما :

• من أجل $s = 0$ يكون $s^2 = 0$

• من أجل $s = -1$ يكون $s^2 = 1$

فالمستقيم (ق) يقطع (ك) في نقطتين هما :

م(0،0) و أ (-1، 1) الشكل :



1 أدرس تغيرات كل من الدوال الآتية ثم :

- أنشئ جدول تغيراتها
- أنشئ ممثلاً لتغيراتها في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد متجانس (م، و، ح).

$$\begin{array}{lll} (1) \text{ س } \longleftarrow \text{ س}^2 & (2) \text{ س } \longleftarrow \text{ س}^2 & (3) \text{ س } \longleftarrow \text{ س}^2 \\ (4) \text{ س } \longleftarrow \text{ س}^2 & (5) \text{ س } \longleftarrow \frac{1}{2} \text{ س}^2 & (6) \text{ س } \longleftarrow \frac{1}{3} \text{ س}^2 \end{array}$$

2 α عدد حقيقي ، (ك) القطع المكافئ الممثل للدالة $\text{س} \longleftarrow \alpha \text{ س}^2$ عين α لكي تنتمي النقطة أ إلى (ك) في كل من الحالات التالية :

$$(1) \text{ أ } (4, 1) ، \text{ أ } (2\sqrt{2}, 1) ، \text{ أ } (3, \frac{1}{2}) ، \text{ أ } (4, -2) ، \text{ أ } (\frac{1}{3}, -)$$

$$(5) \text{ أ } (5, -3) ، \text{ أ } (6, -3\sqrt{2})$$

• أرسم في كل حالة من الحالات السابقة القطع المكافئ (ك)

3 عين نقط تقاطع القطع المكافئ (ك) والمستقيم (ق) في كل من الحالات التالية :

$$(1) \text{ (ك) : ع = س}^2 \text{ و (ق) : ع = 4 س}$$

$$(2) \text{ (ك) : ع = 2 س}^2 \text{ و (ق) : ع = } \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$(3) \text{ (ك) : ع = 3 س}^2 \text{ و (ق) : ع = 5 س}$$

$$(4) \text{ (ك) : ع = } \frac{1}{2} \text{ س}^2 \text{ و (ق) : ع = 4 س}$$

$$(5) \text{ (ك) : ع = س}^2 \text{ و (ق) : ع = 2 س - 1}$$

$$(6) \text{ (ك) : ع = 9 س}^2 \text{ و (ق) : ع = 6 س - 1}$$

$$(7) \text{ (ك) : ع = 9 س}^2 \text{ و (ق) : ع = } \frac{1}{2} \text{ س}$$

4 حل بيانياً كلا من المعادلات التالية :

$$(2) \text{ س}^2 = 1$$

$$(1) \text{ س}^2 = 1$$

$$(4) \text{ س}^2 = 9$$

$$(3) \text{ س}^2 = 5$$

$$(6) \text{ س}^2 = 12$$

$$(5) \text{ س}^2 = 8$$

21

الدالة $s \longleftarrow \frac{1}{s}$ ، $0 \neq$

1. نشاط تمهيدي

. أنتم الجدول التالي :

س	$\frac{1}{4}-$	$\frac{1}{2}-$	$\frac{1}{3}-$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$2-$	$3-$	$2+$	$3+$	1000	2000-
$\frac{1}{s}$												

• قارن بين إشارتي s و $\frac{1}{s}$ وبين قيمتهما .

• أوجد من الجدول قيم s التي تحقق : $s > \frac{1}{s}$. وقيم s التي تحقق $s < \frac{1}{s}$

2

دراسة الدالة $s \longleftarrow \frac{1}{s}$ ، $0 \neq$

(1) دراسة الدالة $s \longleftarrow \frac{3}{s}$.

. مجموعة التعريف :

$$] 0, +\infty[\cup] -\infty, 0[= \text{ف أي } s$$

وهي فردية .

. اتجاه التغير :

من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين s_1 ، s_2 ينتميان معا إما إلى $] 0, +\infty[$ وإما إلى $] -\infty, 0[$ ، لدينا :

$$\frac{3}{3} = \frac{3}{1\text{س}} - \frac{3}{2\text{س}} = \frac{\text{تا}(2\text{س}) - \text{تا}(1\text{س})}{2\text{س} - 1\text{س}}$$

فإشارة نسبة تزايد الدالة تا هي إشارة (- س₁ س₂) .
وبما أن الجداء س₁ س₂ > 0 في كل من المجالين [- ∞ ، 0 [و] 0 ، + ∞]
فإن - س₁ س₂ > 0 في كل من هذين المجالين .
وبالتالي :

تا متناقصة في كل من المجالين [- ∞ ، 0 [و] 0 ، + ∞] .

دراسة الدالة س ← - $\frac{3}{\text{س}}$ عندما تأخذ |س| قيمة كبرى .

بإعطاء المتغير س قيمة موجبة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول) :

س	10	10^{-2}	10^{-3}
$\frac{3}{\text{س}} = \text{تا}(س)$	0,3	0,03	0,003

نجد أن الصور تا (س) موجبة صغيرة ، وتقترب من الصفر أكثر فأكثر ، بقدر ما تكبر قيم المتغير س .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى الصفر بقيم موجبة عندما يؤول س إلى زائد لانهائية .

ونكتب : تا (س) ← 0 عندما س ← + ∞ .

وبإعطاء المتغير قيمة سالبة ، قيمها المطلقة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول) :

س	10-	10^{-2}	10^{-3}
$\frac{3}{\text{س}} = \text{تا}(س)$	0,3-	0,03-	0,003-

نجد أن الصور تا (س) سالبة ، قيمها المطلقة صغيرة وتقترب من الصفر أكثر فأكثر ، بقدر ما تكبر قيم |س| .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى الصفر بقيم سالبة عندما يؤول س إلى ناقص لانهائية .

ونكتب : تا (س) $\leftarrow 0$ عندما س $\leftarrow -\infty$.

دراسة الدالة تا من أجل قيم س القريبة من الصفر :

. بإعطاء المتغير س قيمة " موجبة قريبة من الصفر أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول) :

س	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{1}{310}$
تا(س) = $\frac{3}{س}$	30	300	3000

نجد أن الصور تا (س) موجبة ، وتكبر أكثر فأكثر بقدر ما تصغر قيم س .
نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى زائد لانهائية عندما يؤول س إلى الصفر بقيمة موجبة .

ونكتب : تا (س) $\leftarrow +\infty$ عندما س $\leftarrow 0^+$

. وبإعطاء س قيمة " سالبة ، قريبة من الصفر أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول)

س	$\frac{1}{10}^-$	$\frac{1}{210}^-$	$\frac{1}{310}^-$
تا(س) = $\frac{3}{س}$	-30	-300	-3000	-----




نجد أن الصور تا (س) سالبة . وقيمها المطلقة تكبر أكثر فأكثر بقدر ما تصغر قيم | س | .
نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى ناقص لانهائية عندما يؤول س إلى الصفر بقيمة سالبة . ونكتب :

تا (س) $\leftarrow -\infty$ عندما س $\leftarrow 0^-$

. جدول التغيرات :

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

س	∞^-	0	∞^+
تا(س) = $\frac{3}{س}$			

الخط المزوج يدل على أن الدالة تا غير معرفة عند الصفر .
 التمثيل البياني :

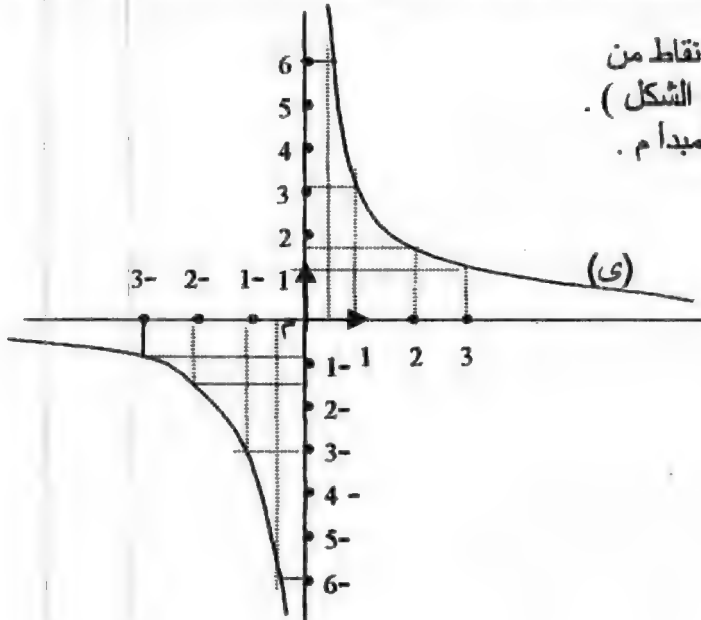
ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس (م ، و ، ي)

الممثل البياني (ي) للدالة تا : س $\longleftarrow \frac{3}{س}$ هو مجموعة النقط ن (س ، ع)

حيث س و ع = $\frac{3}{س}$. ويسمى قطعاً "زائداً" .

ويكون (ي) متناظراً بالنسبة إلى المبدأ م لأن تا فردية .
 لرسم (ي) نشكل جدولاً كالتالي :

س	3-	2-	1-	$\frac{1}{2}-$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
ع = $\frac{3}{س}$	1-	$\frac{3}{2}-$	3-	6-		6	3	$\frac{3}{2}$	1-



النقاط (س ، ع) هي نقاط من
 القطع الزائد (ي) (الشكل) .
 المتناظر بالنسبة إلى المبدأ م .

(2) . دراسة الدالة تا : س $\leftarrow \frac{2-}{س}$

. مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة في ح * ، أي ف $= [-\infty, 0[\cup]0, +\infty]$ وهي فردية .

. اتجاه التغير :

من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين $س_1$ و $س_2$ ينتميان معا " إما إلى $]-\infty, 0[$ وإما إلى $]0, +\infty[$ لدينا :

$$\frac{\frac{2-}{س_1} - \frac{2-}{س_2}}{\frac{2-}{س_1} - \frac{2-}{س_2}} = \frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1}$$

فإشارة نسبة تزايد الدالة تا هي إشارة الجداء $س_1 س_2$.

وبما أن $س_1 س_2 < 0$ في كل من $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ فإن الدالة متزايدة في كل من هذين المجالين .

دراسة الدالة تا عندما تأخذ |س| قيما كبرى .

. بإعطاء المتغير س قيما " موجبة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول) :

س	10	10^2	10^3
تا(س) = $\frac{2-}{س}$	-0,2	-0,02	-0,002

نجد أن الصور تا (س) سالبة ، وقيما المطلقة تصغر وتقترب من الصفر أكثر فأكثر بقدر ما تكبر قيم س .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى الصفر بقيم سالبة عندما يؤول س إلى زائد لانهائية .

ونكتب : تا (س) $\leftarrow 0$ عندما س $\leftarrow +\infty$

. بإعطاء س قيما " سالبة قيمها المطلقة كبيرة أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول)

س	10-	² 10-	³ 10-
تا(س) = $\frac{2}{س}$	0,2	0,02	0,002

نجد أن الصور تا (س) موجبة صغيرة وتقترب من الصفر أكثر فأكثر بقدر ما تكبر القيم المطلقة للمتغير س .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى الصفر بقيم موجبة عندما يؤول س إلى ناقص لانهاية .

ونكتب : تا (س) $\xrightarrow{<} 0$ عندما س $\xrightarrow{\infty} -$

دراسة الدالة تا من أجل قيم المتغير س القريبة من الصفر 0

. بإعطاء المتغير س قيما موجبة قريبة من الصفر أكثر فأكثر ، وتعيين صورها (الجدول) :

س	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
تا(س) = $\frac{2}{س}$	20-	200-	2000-

نجد أن الأعداد تا (س) سالبة ، وقيمها المطلقة تكبر أكثر فأكثر بقدر ما تصغر قيم س وتقترب من الصفر .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى ناقص لانهاية عندما يؤول س إلى الصفر بقيم موجبة .

ونكتب : تا (س) $\xrightarrow{\infty} -$ عندما س $\xrightarrow{<} 0$

وبإعطاء س قيما " سالبة قريبة من الصفر أكثر فأكثر وتعيين صورها (الجدول) :

س	$\frac{1}{10}$ -	$\frac{1}{20}$ -	$\frac{1}{30}$ -
تا(س) = $\frac{2}{س}$	20	200	2000

نجد أن الصور تا (س) موجبة وتكبر أكثر فأكثر بقدر ما تقترب قيم س من الصفر .

نقول في هذه الحالة :

تا (س) يؤول إلى زائد لانهاية عندما يؤول س إلى الصفر بقيم سالبة .

ونكتب : تا (س) $\leftarrow +\infty$ عندما $0 < -\infty$

. جدول التغيرات :

نلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

س	$\infty -$	0	$\infty +$
تا(س) = $\frac{2}{س}$	0	$\infty +$	$\infty -$

التمثيل البياني :

نزود المستوي بمعلم متعامد متجانس (م ، و ، ي)

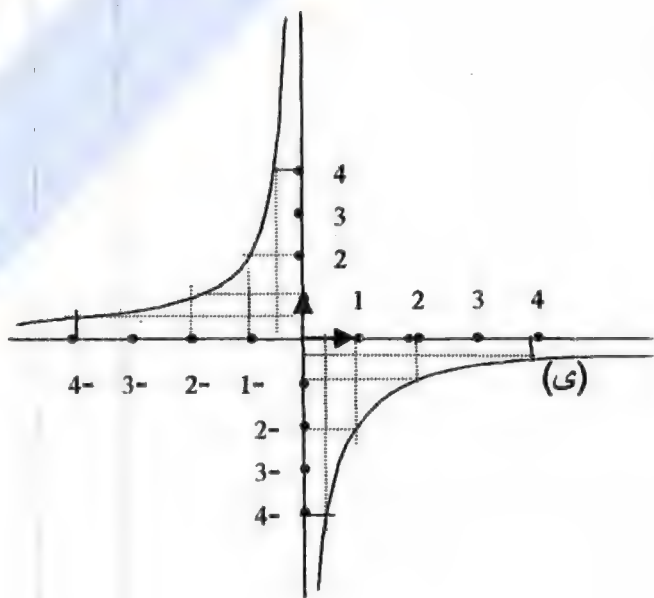
الممثل البياني (ي) للدالة تا : س $\leftarrow \frac{2}{س}$ هو مجموعة النقط

ن (س ، ع) حيث س $\in \mathbb{R}^*$ و $ع = \frac{2}{س}$.

يسمى (ي) قطعاً "زائداً" . والمبدأ م هو مركز تناظر له .
ولرسم (ي) نشكل جدولاً كالتالي :

س	4-	2-	1-	0	$\frac{1}{2}-$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
تا(س) = $\frac{2}{س}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	4	2	1	2	4

النقط (س ، ع) هي نقاط من القطع الزائد (ي) المتناظر بالنسبة إلى المبدأ م (الشكل) .



(3) دراسة الدالة تا : من $\leftarrow \frac{أ}{س}$ حيث $أ \neq 0$

. مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم .

ومنه $ف =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

. اتجاه التغير :

من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين $س_1$ ، $س_2$ ينتميان معا" إما إلى المجال

$]-\infty, 0[$ وإما إلى المجال $]0, +\infty[$ لدينا :

$$\frac{أ}{س_1} - \frac{أ}{س_2} = \frac{أ(س_2 - س_1)}{س_1 س_2} = \frac{أ(س_2 - س_1)}{س_1 س_2}$$

بما أن $s_1, s_2 < 0$ في كل من المجالين $[-\infty, 0]$ و $[0, +\infty]$ فإن إشارة نسبة تزايد الدالة α هي إشارة المعامل - α .
لهذا نميز حالتين :

. إذا كان $\alpha < 0$ فإن الدالة α متناقصة في كل من $[-\infty, 0]$ و $[0, +\infty]$.
. وإذا كان $\alpha > 0$ فإن الدالة α متزايدة في كل من $[-\infty, 0]$ و $[0, +\infty]$.

دراسة قيم α (س) عندما يأخذ $|s|$ قيمة "كبيرة أو صغرى".

. نستخلص من دراسة المثالين : $s \leftarrow \frac{3}{s}$ و $s \leftarrow \frac{2}{s}$

أن الدالة α : $s \leftarrow \frac{1}{s}$ ، $\alpha \neq 0$ لها أربع نهايات ، هي حسب إشارة α :

$0 > \alpha$	$0 < \alpha$
<p>تأ(س) $\leftarrow \frac{1}{s} < 0$ عندما $s \leftarrow -\infty$</p> <p>تأ(س) $\leftarrow \frac{1}{s} > 0$ عندما $s \leftarrow +\infty$</p> <p>تأ(س) $\leftarrow \frac{1}{s} < 0$ عندما $s \leftarrow -\infty$</p> <p>تأ(س) $\leftarrow \frac{1}{s} > 0$ عندما $s \leftarrow +\infty$</p>	<p>تأ(س) $\leftarrow \frac{1}{s} > 0$ عندما $s \leftarrow -\infty$</p> <p>تأ(س) $\leftarrow \frac{1}{s} < 0$ عندما $s \leftarrow +\infty$</p> <p>تأ(س) $\leftarrow \frac{1}{s} > 0$ عندما $s \leftarrow -\infty$</p> <p>تأ(س) $\leftarrow \frac{1}{s} < 0$ عندما $s \leftarrow +\infty$</p>

. جدول التغيرات

نلخص النتائج السابقة في الجدولين الآتيين حسب إشارة α .

$0 > 1$			
$-\infty$	0	$+\infty$	س
$0 \nearrow$		$+\infty \nwarrow$	تأ(س) = $\frac{1}{s}$
$-\infty$		0	

$0 < 1$			
$-\infty$	0	$+\infty$	س
$0 \nwarrow$		$+\infty \nearrow$	تأ(س) = $\frac{1}{s}$
$-\infty$		0	

. التمثيل البياني :

ينسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس (م ، و ، ي)

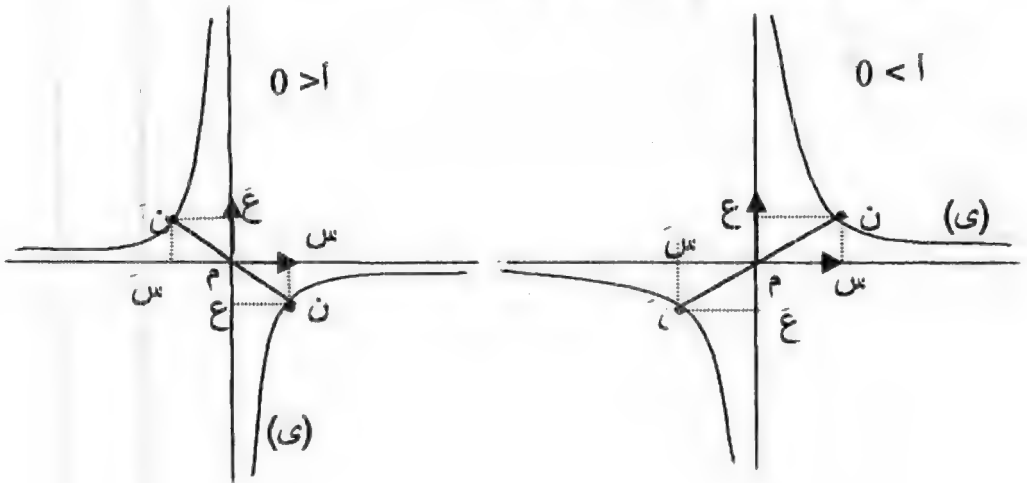
الممثل البياني (ي) للدالة تا : س $\longleftarrow \frac{أ}{س}$ ، $أ \neq 0$ هو مجموعة النقط

ن (س ، ع) حيث س وف و $ع = \frac{أ}{س}$.

يسمى (ي) قطعاً زائداً . ومعادلته هي $ع = \frac{أ}{س}$.

المبدأ م هو مركز تناظر لهذا القطع .

الشكلان التاليان يمثلان (ي) حسب إشارة أ .



3. تطبيقات

11 عيّن الدالة $s \longleftarrow \frac{1}{s}$ ، $0 \neq 1$

لنعين الدالة تا : $s \longleftarrow \frac{1}{s}$ التي ممثلها البياني (ي) يشمل النقطة ن (2، -3)

لدينا : معادلة (ي) من الشكل $\frac{1}{s} = ع$

ن (2، -3) \Rightarrow (ي) $\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 3 -$

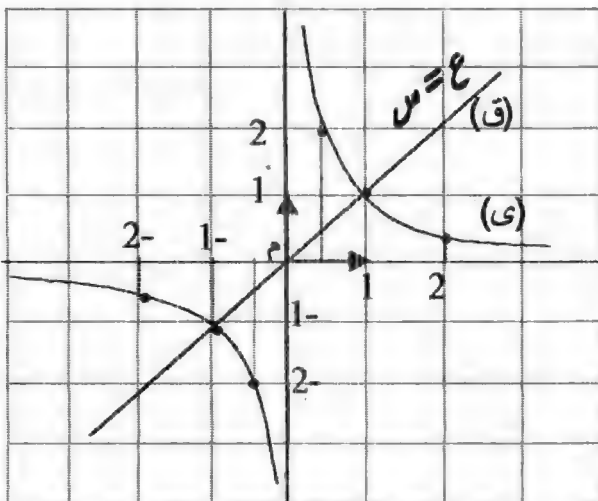
$\Leftrightarrow 6 - = 1$

فالدالة المطلوبة هي $s \longleftarrow \frac{6-}{s}$

12 حل المعادلة $\beta + \alpha = \frac{1}{s}$:

لنحل بيانياً "المعادلة $\frac{1}{s} = ع$ "

نرسم في معلم متعامد متجانس (م ، و ، ي) كلا من : القطع الزائد



(ي) : $\frac{1}{s} = ع$

والمستقيم (ق) : $ع = س$
نقرأ فواصل نقط تقاطع

(ق) و (ي) (إن وجدت)
فنحصل على العديدين

1- و 1+ اللذين هما

حلا المعادلة $\frac{1}{s} = ع$.

(3) . تقاطع قطع زائد ومستقيم .

ليكن : القطع الزائد (ي) : $\frac{4}{s} = ع$ والمستقيم (ق) : $ع = -س - 4$

ولنبحث عن احداثيات نقط تقاطعهما .
لتكن ن (س ، ع) نقطة من المستوي .

$$ن \in (ي) \Leftrightarrow ع = \frac{4}{s}$$

$$ن \in (ق) \Leftrightarrow ع = -س - 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{s} = ع \\ ع = -س - 4 \end{array} \right\} \text{ . احداثيات نقط تقاطع (ي) و (ق) هي حلول الجملة}$$

وتكون س فاصلة لنقطة مشتركة إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{4}{s} = -س - 4 \dots\dots\dots (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 4 = -س^2 - 4س$$

$$(1) \Leftrightarrow س^2 + 4س + 4 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية يؤول حلها إلى حل معادلة من الدرجة الأولى .

$$أي : (1) \Leftrightarrow 0 = (2 + س)^2$$

$$(1) \Leftrightarrow س = -2$$

ومن أجل س = -2 يكون ع = -2

ومنه (ي) و (ق) يتقاطعان في النقطة (-2 ، -2) .

تمارين

1. ادرس تغيرات كلٍّ من الدوال الآتية :
شكل جدول تغيرات كل منها .

. أنشئ تمثيل كل منها في معلم متعامد متجانس (م ، و ، ي)

$$(1) \text{ س } \longleftarrow \frac{2}{\text{س}} \quad (2) \text{ س } \longleftarrow \frac{3}{\text{س}}$$

$$(3) \text{ س } \longleftarrow \frac{2-}{\text{س}} \quad (4) \text{ س } \longleftarrow \frac{1}{\text{س}^2}$$

$$(5) \text{ س } \longleftarrow \frac{4}{\text{س}^3} \quad (6) \text{ س } \longleftarrow \frac{2-}{\text{س}^3}$$

2. ادرس تغيرات كل من الدوال الآتية :
اكتب كلا منها بدون رمز القيمة المطلقة .
شكل جدول تغيرات كل منها .

. أنشئ الممثل البياني لكل منها في معلم متعامد متجانس (م ، و ، ي)

$$(1) \text{ س } \longleftarrow \frac{1}{|\text{س}|} \quad (2) \text{ س } \longleftarrow \frac{2-}{|\text{س}|}$$

$$(3) \text{ س } \longleftarrow \frac{2-}{|\text{س}|^3} \quad (4) \text{ س } \longleftarrow \frac{3}{\sqrt[2]{\text{س}}}$$

3. α عدد حقيقي غير معدوم . (ي) القطع الزائد الممثل للدالة

$$\text{س } \longleftarrow \frac{\alpha}{\text{س}}$$

. عين α لكي تنتمي النقطة أ إلى (ي) في كلٍّ من الحالات التالية :

$$(1) \text{ أ } (2- , 1)$$

$$(2) \text{ أ } \left(\frac{1}{3} , \frac{1}{2} \right)$$

$$(3) \text{ أ } \left(4 , -\frac{1}{4} \right)$$

$$(4) \text{ أ } \left(\frac{1}{5} , -5 \right)$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 \quad (5)$$

$$(1 + \sqrt{2}, \frac{1}{1 - \sqrt{2}})^2 \quad (6)$$

4. حل بيانيا "كلا" من المعادلات التالية :

$$2 = \frac{1-s}{s} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{s} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4s} \quad (4)$$

$$4 = \frac{2}{s} \quad (3)$$

5. عين نقاط تقاطع المستقيم (ق) والقطع الزائد (ي) (إن وجدت) في كل من الحالات التالية :

$$\frac{2}{s} = \text{ع} : (ي) \quad \text{و} \quad (ق) : \text{ع} = -3 \quad (1)$$

$$\frac{2}{s} = \text{ع} : (ي) \quad \text{و} \quad (ق) : \text{ع} = 4 \quad (2)$$

$$\frac{5}{s} = \text{ع} : (ي) \quad \text{و} \quad (ق) : \text{ع} = 20 \text{ س} \quad (3)$$

$$\frac{9-s}{s} = \text{ع} : (ي) \quad \text{و} \quad (ق) : \text{ع} = \text{س} + 6 \quad (4)$$

$$\frac{25}{s} = \text{ع} : (ي) \quad \text{و} \quad (ق) : \text{ع} = -4 \text{ س} - 20 \quad (5)$$

$$\frac{4-s}{s} = \text{ع} : (ي) \quad \text{و} \quad (ق) : \text{ع} = 9 \text{ س} - 12 \quad (6)$$

محتويات الكتاب

الصفحة	الفقرة	الصفحة	الفقرة
113	7. النسبة والتناسب	7	1. القواسم والمضاعفات
123	تطبيقات	15	تطبيقات
125	تمارين محلولة	17	تمارين محلولة
127	تمارين	19	تمارين
133	8. النسب المثلثية	21	2. القاسم المشترك الأكبر
140	تطبيقات	26	تطبيقات
146	تمارين محلولة	31	تمارين محلولة
149	تمارين	33	تمارين
153	9. مفردات المنطق	35	3. المضاعف المشترك الأصغر
162	تطبيقات	38	تطبيقات
163	تمارين محلولة	40	تمارين محلولة
165	تمارين	42	تمارين
168	10. المجموعات	45	4. الأعداد الكسرية والعمليات عليها
172	تطبيقات	59	تطبيقات
175	تمارين محلولة	63	تمارين محلولة
176	تمارين	66	تمارين
179	11. العلاقات	73	5. العمليات في ح
186	تطبيقات	79	تطبيقات
189	تمارين محلولة	84	تمارين محلولة
192	تمارين	88	تمارين
195	12. الدالة - التطبيق	94	6. المتباينات في ح
201	تطبيقات	102	تطبيقات
205	تمارين محلولة	106	تمارين محلولة
207	تمارين	109	تمارين

291	المعلم المستوي	17	211	كثيرات الحدود	13
296	تطبيقات		226	تطبيقات	
300	تمرين محلول		228	تمرين محلول	
304	تمارين		230	تمارين	
309	الدوال العددية لمتغير حقيقي	18	235	للمعادلات من الدرجة الأولى	14
317	تطبيق		247	تطبيقات	
318	تمرين محلول		248	تمرين محلول	
321	تمارين		250	تمارين	
327	الدالة التآلفية	19	257	للمترابحات من الدرجة الأولى	15
334	تطبيقات		264	تطبيقات	
338	تمارين		267	تمرين محلول	
341	الدالة تا(س) = أس ² ...	20	269	تمارين	
347	تطبيقات		273	الأشعة	16
349	تمارين		282	تطبيقات	
351	الدالة تا(س) = $\frac{1}{س}$	21	284	تمرين محلول	
361	تطبيقات		286	تمارين	
363	تمارين				



الطبعة الأولى

2001 - 2000

Code 1132



الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية